О. А. Белослудцев, В. Б. Соловьянов

Методические приемы в решении олимпиадных заданий математики

Методические рекомендации

ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
Свердловской области

Министерство образования и молодёжной политики Свердловской области
Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования Свердловской области
«Институт развития образования»
Кафедра математики и информатики

О. А. Белослудцев, В. Б. Соловьянов

Методические приемы в решении олимпиадных заданий математики

Методические рекомендации

Екатеринбург
2023

ББК 74.262.21
М 54

Рецензенты:
Бородич Е. В., учитель математики МАОУ гимназия № 18, г. Нижний Тагил;
Куликов Ю. А., доцент кафедры управленческих и педагогических технологий НТФ ГАОУ ДПО СО «ИРО», кандидат физико-математических наук

Авторы-составители:
Белослудцев О. А., старший преподаватель кафедры математики и информатики ГАОУ ДПО СО «ИРО»;
Соловьянов В. Б., старший преподаватель кафедры математики и информатики ГАОУ ДПО СО «ИРО»

М 54 **Методические приемы в решении олимпиадных заданий математики**: методические рекомендации / Министерство образования и молодёжной политики Свердловской области, Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования Свердловской области «Институт развития образования»; кафедра математики и информатики, авт.-сост.: О. А. Белослудцев, В. Б. Соловьянов. – Екатеринбург: ГАОУ ДПО СО «ИРО», 2023 – 17 с.

Настоящие рекомендации посвящены проблемам подготовки школьников к решению олимпиадных задач по математике для школьного и муниципального этапов. Они предназначены для учителей математики общеобразовательных организаций, в которых преподаются методы решения нестандартных заданий, помогающие осваивать учебный предмет «Математика» на углубленном уровне. Предложенный авторами материал может быть востребован при подготовке к ГИА в формате ЕГЭ по математике.

Утверждено Научно-методическим советом ГАОУ ДПО СО «ИРО» от 25.09.2023 № 11.

ББК 74.262.21

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для понимания условий и решений задач, которые в математике носят олимпиадный характер, используются не только знания школьного курса математики, но и некоторые дополнительные методы, оригинальные подходы, не применяемые в обычной школьной практике. Математические олимпиадные задания являются близкими к традиционным разделам математики, таким как «числа», «функции», «уравнения и неравенства» и т. п., но при этом охватывают, как правило, несколько разделов; для их решения необходимо уметь рассуждать, догадываться, создавать правильную логику доказательства. Решение таких заданий базируется на некотором методе или оригинальной идее, относящейся к олимпиадной тематике.

Данные методические рекомендации написаны на основе опыта работы в фонде по работе с талантливой молодежью «Золотое сечение» одним из авторов Белослудцевым Олегом Анатольевичем, который на протяжении нескольких лет ведет программы для учащихся 7–10-х классов по подготовке к школьному и муниципальному этапам Всероссийской олимпиады школьников по математике. Представленные здесь задачи можно использовать на уроках по внеклассной работе по математике с учащимися 5–9-х классов. Авторы надеются, что предложенные задачи в данном пособии могут быть использованы при подготовке к различным видам математических состязаний, включающим не только классические школьные олимпиады, но и турниры типа «математический бой», «интеллектуальный марафон», «математическое ориентирование» и другие.

ВВЕДЕНИЕ

История развития математического олимпиадного движения насчитывает уже более 130 лет, с конца XIX века. По одним данным [2], в 1886 году, по другим – [3] в 1889 году в Румынии прошел первый математический конкурс для выпускников лицеев. Немного позднее, уже в 1894 году, в Будапеште (Венгрия) состоялось состязание для выпускников гимназий, подготовленное Венгерским физико-математическим обществом, именно его можно считать первой полноценной олимпиадой по математике. Возглавил это состязание известный физик Лоранд Этвёш, впоследствии оно стало традиционным.

В нашей стране олимпиадное движение началось в Ленинграде: в 1934 году, когда состоялась городская математическая олимпиада, ее организатором стал Ленинградский университет, затем в следующем году в Москве олимпиада по математике проводилась по инициативе Московского математического общества. Председатель комитета Первой Московской олимпиады академик П. С. Александров, обращаясь к участникам, по этому поводу писал: «…Одной из наиболее действенных форм нашей помощи самым молодым дарованиям является организация олимпиады. Это состязание должно заставить лучших из них почувствовать себя уже настоящими математиками, будущими учеными». В первом туре этой олимпиады приняли участие 314 школьников, из которых 120 участвовали во втором, заключительном туре, причем трое стали победителями (первая премия) и восемь – призерами (вторая премия). Проведение этих олимпиад способствовало привлечению математически одаренной школьной молодежи к проблемам и методам математики, достижениям отечественной науки того времени.

В 60-е годы XX столетия началось возрождение олимпиадного движения, прерванного Великой Отечественной войной и последовавшим за ней периодом послевоенного восстановления, когда советскими учеными была разработана методика проведения всесоюзных и всероссийских олимпиад, включавших предметные олимпиады не только по математике, но и по физике и химии. В 1961 году была проведена уже первая большая олимпиада, в которой приняли участие почти все регионы страны. Впервые приказ об утверждении государственной системы предметных олимпиад школьников был подписан в 1964 году министром просвещения РСФСР, членом-корреспондентом Академии наук СССР М. А. Прокофьевым. В том же году был создан оргкомитет проведения олимпиад, который возглавил академик П. Л. Капица. В 1965 году председателем Центрального Оргкомитета всероссийских, а затем и всесоюзных олимпиад был избран академик И. К. Кикоин [1]. В Советском Союзе работа с талантливой молодежью велась в разных формах и приносила свой результат, который выразился в значительных достижениях отечественной науки.

Уже тогда была разработана 4-уровневая система проведения предметных олимпиад для школьников, которая успешно применяется в настоящее время на всероссийских олимпиадах и показала свою эффективность. Математическая олимпиада включает 4 этапа (уровня).

1. Школьный этап, проводящийся на базе образовательного учреждения.
2. Призеры первого этапа переходят в следующую стадию – муниципальный этап, организатором которого выступает орган исполнительной власти на уровне муниципального района или города.
3. Региональный этап, в котором участвуют победители и призеры муниципального этапа, организатором выступает региональное министерство образования, создающее специальную предметную комиссию для составления и проверки решения заданий олимпиады.
4. На заключительном этапе организатором выступает Министерство просвещения РФ. В 2023 году этот этап проходил 27–28 апреля на территории Федерального центра образования «Сириус» в городе Сочи.

Кстати, и региональный, и заключительный этапы олимпиады по математике проводятся в течение двух дней, включают задания теоретического и практического туров. Победители последнего этапа имеют право без сдачи вступительных испытаний при получении аттестатов о среднем общем образовании быть зачисленными в вуз [4].

Основная цель проведения математических олимпиад – выявление талантливой молодежи, поиск одаренных детей, а также всестороннее развитие обучающихся. Олимпиада является мощным источником мотивации, ведь решение нестандартных задач способствует развитию заинтересованности учащихся в получении знаний по предмету, развивает тягу к получению новых знаний и в перспективе предлагает реализовывать олимпиадные идеи в практических заданиях для разных сфер жизни или выйти на формирование «новых» научных идей. Как правило, дети, которые добиваются высоких результатов по итогам участия в олимпиадах, имеют большой потенциал в научной сфере, и зачастую именно они становятся светилами научной мысли.

Олимпиадное сообщество в настоящее время динамично развивается. Облик математических олимпиад сформирован, но всё же претерпевает незначительные изменения. Попадая на школьный этап всероссийской олимпиады по математике, современный школьник видит, что он может решать задачи более сложные, более интересные, творческие, чем те, которые есть в учебнике, в том числе помеченные звездочкой. Тем самым обучающийся старается узнать больше дополнительных сведений из теории, посмотреть материал сверх школьного курса, чтобы в дальнейшем применить эти знания на олимпиадах. На этом он не останавливается, а наоборот, хочет большего. На нынешнем этапе в России не хватает думающих математиков, способных делать открытия, предлагать оригинальные идеи и их реализацию на практике, тем самым расширяя область применения школьного курса математики. Поэтому активизация работы по вовлечению школьников в подготовку и участие в различных математических конкурсах даст возможность стране воспитать великие умы.

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАНИЯ НА ЧИСЛА

Одной из самых востребованных тем, встречающейся в программе олимпиадных заданий математики, являются задания на числа. Данная тема проходит по всем параллелям, начинается с начальной школы и заканчивается в старших классах, в частности, даже в программе единого государственного экзамена по математике профильного уровня задание с числами считается одним из самых трудных (высокого уровня сложности). Проиллюстрируем некоторые олимпиадные методы и способы рассуждения при решении таких заданий.

Пример 1. Среднее арифметическое нескольких подряд идущих натуральных чисел меньше, чем самое большое из них, в полтора раза. Во сколько раз среднее арифметическое больше, чем самое маленькое из этих чисел?

Решение. Как в любой задаче на числа, решение этой задачи можно рассматривать без конкретизации выбора числа, когда сами числа последовательности выбираем в общем виде, т. е. a_1 – первое число в натуральном ряде, $a_2 = a_1 + 1$, … $a_n = a_1 + n - 1$ – последнее число этой последовательности. Тогда по определению среднего арифметического и условию задачи имеем:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n} = \frac{a_n}{1{,}5}. \qquad (1)$$

Заметим, что, если каждое число в числителе дроби, стоящей в левой части равенства (1), заменить выражением, связывающим его значение с a_1, получим

$$\frac{n\cdot a_1+1+2+\cdots+n-1}{n} = \frac{2}{3}\cdot(a_1\ + n - 1) \text{ или } \frac{n\cdot a_1+\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)}{n} = \frac{2}{3}\cdot(a_1\ + n - 1).$$

После сокращения на n и приведения подобных получится $n = 2 \cdot a_1 + 1$. Для ответа на вопрос задачи требуется найти коэффициент k из равенства

$$\frac{a_1+a_2+a_n}{n} = k\cdot a_1.$$

Используя предыдущие преобразования, имеем:

$$\frac{n\cdot a_1+\frac{n}{2}\cdot(n-1)}{n} = k\cdot a_1 \text{ или } \frac{a_1+\frac{1+a_1-1}{2}}{a_1} = k,$$ откуда получится, что $k = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Вася загадал шестизначное число, начиная с цифры 1. Петя зачеркнул в нем первую цифру и дописал единицу в конец, в результате чего число увеличилось в 3 раза. Какое число загадал Вася?

Решение. Если записать число, задуманное Васей, с введением пяти неизвестных x, y, z, u, v, то решение становится несколько громоздким, т. к. даже запись $\overline{1xyzuv} = 100\,000 + 10\,000\cdot x + 1\,000\cdot y + 100\cdot z + 10\cdot u + v$ выглядит сложным образом. Для упрощения вида записи можно пять последних слагаемых в сумме записать одной буквой, тогда получим: $\overline{1a} = 100\,000 + a$ – исходное число, которое задумал Вася; после исправления Пети имеем $\overline{a1} = 10 \cdot a + 1$. По условию задачи легко получится уравнение $10 \cdot a + 1 = 3 \cdot (100\,000 + a)$ или $7 \cdot a = 299\,999$, откуда a = 42 857. Значит, Вася загадал число 142 857.

Ответ: 142 857.

Рекомендации учителю: на примере этой задачи показать 2 способа решения (с одним неизвестным или пятью неизвестными), выделив их как рациональный и нерациональный, тем самым показав, в чем олимпиадность задачи.

Пример 3. У Вани 4 яблока, у Коли – 41 яблоко, а у всех остальных мальчиков по 14 яблок. Мальчики могут поменяться между собой яблоками так, чтобы у всех стало поровну. Сколько всего мальчиков?

Решение. Пусть x – число мальчиков, у которых было сначала по 14 яблок, тогда с учетом Вани и Коли общее количество ребят равно $x + 2$. Кроме того, обозначим за n – количество яблок, которое стало у мальчиков после обмена, тогда по условию задачи получим уравнение $45 + 14 \cdot x = (x + 2) \cdot n$. Прежде чем решать это уравнение в целых числах, отметим следующее: левая часть уравнения при любом натуральном x всегда нечетная, поэтому оба множителя правой части также являются нечетными. Преобразуем это уравнение к виду: $14 \cdot x + 28 + 17 = (x + 2) \cdot n$ или $(x + 2) \cdot (n - 14) = 17$. Так как число 17 является простым и $x + 2$ – нечетное натуральное число, большее 2, то единственное решение последнего уравнения в целых числах будет, если $x + 2 = 17$ и $n - 14 = 1$. Таким образом, всего мальчиков было 17.

Ответ: 17 мальчиков.

Рекомендации учителю: обратить внимание, что математическая модель приводит к так называемому диофантовому уравнению (уравнению с целочисленными коэффициентами и решением его в натуральных числах), в котором одним из приемов в решении необходимо использовать свойство делимости коэффициентов.

Пример 4. Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 2, а второй уменьшить на 2, то произведение увеличится на 100. На сколько изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 2, а второй увеличить на 2?

Решение. Так как сами числа нам не важны, будем рассуждать в общем виде, т. е. пусть изначально числа были x и y, $x \cdot y$ – произведение. После того как первый множитель увеличили на 2, а второй уменьшили на 2, получилось $(x + 2) \cdot (y - 2) = x \cdot y + 2 \cdot y - 2 \cdot x - 4$. Произведение увеличилось на 100, т. е. $2 \cdot y - 2 \cdot x - 4 = 100$ или $y - x = 52$. Если же первый множитель уменьшить на 2, а второй увеличить на 2, получится $(x - 2) \cdot (y + 2) = x \cdot y - 2 \cdot y + 2 \cdot x - 4$. Заметим, что $x \cdot y - 2 \cdot y + 2 \cdot x - 4 = x \cdot y - 2 \cdot (y - x) - 4 = x \cdot y - 104 - 4 = x \cdot y - 108$. Таким образом, произведение *уменьшилось на 108*.

Ответ: уменьшилось на 108.

Рекомендации учителю: данная задача легко тиражируется, в ней для закрепления можно менять 2 числа одновременно – это увеличение (уменьшение) каждого множителя на натуральное число ($x – n$ или $y + n$, n – параметр), а также выбирать первоначальное изменение (увеличение) произведения.

Пример 5. Найдите все квадратные трехчлены $x^2 + ax + b$ с целыми корнями, если известно, что $a + b = 28$.

Решение. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$, причем $x_1 \le x_2$. Как известно, чаще всего при решении квадратных уравнений используют теорему Виета, поэтому попробуем ею воспользоваться. Тогда:

$$x_1 + x_2 = -a,\ x_1 \cdot x_2 = b;\ 28 = -x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2 = (x_1 - 1)\,(x_2 - 1) - 1.$$

Заметим, что числа $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$ – целые и первое из них не больше второго; в силу того, что их произведение равно 29 (простое число), то возможно только 2 варианта:

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 29 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_1 - 1 = -29 \\ x_2 - 1 = -1 \end{cases}.$$

В первом случае корни квадратного трехчлена равны 2 и 30, тогда имеем $x^2 - 32x + 60$, во втором случае – 28 и 0, откуда получим $x^2 + 28x$.

Ответ: $x^2 - 32x + 60$ и $x^2 + 28x$.

Рекомендации учителю: как и пример 4, задача легко тиражируется, в ней также можно подбирать значения суммы коэффициентов a и b, заметив, что в итоге получается диофантово уравнение с целочисленным решением, где важно сузить количество вариантов перебора, чтобы число $a + b + 1$ стало простым.

Пример 6. Квадраты со сторонами 11, 9, 7 и 5 расположены так, как на рисунке. Оказалось, что площадь серых частей в 2 раза больше, чем площадь черных частей. Найдите суммарную площадь белых частей.

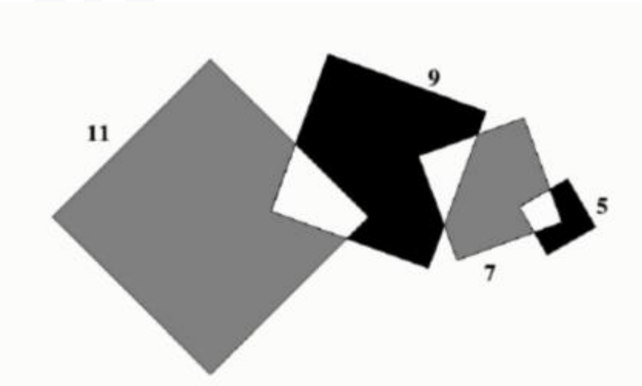

Рис. Чертеж к примеру 6

Решение. Обозначим серые части площадей квадратов за a, b; черные части площадей – c, d. Тогда по условию задачи имеем уравнение $a + b = 2 \cdot (c + d)$. Тогда белые части квадратов на этом рисунке обозначим как x, y, z (слева направо). Тогда по условию задачи легко получится система (2) из пяти уравнений, содержащая 7 неизвестных, в которой требуется найти сумму $x + y + z$.

$$\begin{cases} a+b=2(c+d) \\ a+x=121 \\ c+x+y=81 \\ b+y+z=49 \\ z+d=25 \end{cases} \qquad (2)$$

Сразу можно заметить, что стандартные приемы при решении таких систем (метод исключения неизвестных или метод подстановки) в данной системе не подходят, т. к. число неизвестных больше, чем число уравнений. Поэтому можно попытаться решить задание по-другому. Известно, что путем сложения уравнений системы мы получаем уравнение-следствие, и так как требуется найти не x, y, z по отдельности, а их сумму, то естественно становится сложить 4 последних уравнения в системе (2), тогда после перегруппировки слагаемых получим $a + b + c + d + 2 \cdot (x + y + z) = 121 + 81 + 49 + 25 = 276$. Заменим в этом уравнении сумму $a + b$ на $2 \cdot (c + d)$, и из 3-го и 5-го уравнений системы выразим $c = 81 - x - y$, $d = 25 - z$, тогда имеем $3 \cdot (81 - x - y + 25 - z) + 2 \cdot (x + y + z) = 276$. В последнем уравнении, раскрыв скобки и приведя подобные, получим, что: $318 - (x + y + z) = 276$, откуда искомая сумма $x + y + z = 42$.

Ответ: 42.

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Найдите разность между числами $X = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \ldots + 1000 \cdot 1001$ и $Y = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + 999 \cdot 1000 + 1001$.

Указание к решению: разность можно легко найти группировкой слагаемых типа $2 \cdot 3 - 1 \cdot 2$ и т. п., после вынесения за скобки общего множителя использовать формулу суммы членов арифметической прогрессии.

Ответ: 500 000.

Задача 2. Числа x, y, z таковы, что:

$$(x + y) \cdot (x + y + z) = 637,\ (y + z) \cdot (x + y + z) = 940,$$
$$(z + x) \cdot (x + y + z) = 895.$$

Чему может быть равно $(x + y + z)^2$?

Указание к решению: если сложить 3 равенства и вынести за скобки общий множитель, то получим удвоенный квадрат суммы $x + y + z$.

Ответ: 1236.

Задача 3. Петя заменил каждую букву на натуральное число от 1 до 10 (разные буквы – на разные числа, одинаковые – на одинаковые), так что произведение $a^b b^c c^d d^e e^f f^g g^k k^l l^m m^a$ делилось на наибольшую возможную степень 2. Напишите степень двойки, на которую делится произведение (например, если произведение делится на 16, в ответе надо написать 4).

Указание к решению: заметим, что 8 и 4 являются 3-й и 2-й степенью двойки, поэтому, чтобы данное произведение содержало максимальную степень двойки, необходимо включение в него в качестве множителей числа $8^{10} = 2^{30}$

и $4^9 = 2^{18}$. Из оставшихся четных чисел 2, 6, 10 составить множители вида 2^a, где a подбирать по максимуму, т. е. из набора 6, 7, 8, так как 9-я и 10-я степени уже заняты. Показать, что такое сложное число существует, и получить ответ 69.

НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

Одной из важных олимпиадных тем, в которых можно показать привлекательность и нестандартность заданий олимпиадного характера для обучающихся, интересующихся математикой уже в начальной школе, являются задачи, связанные с нахождением наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного для нескольких натуральных чисел. Рассмотрим несколько примеров, посвященных этой теме.

Наибольшим общим делителем (*НОД*) нескольких целых чисел называют наибольшее число, на которое делятся нацело, т. е. без остатка, все данные числа.

Пример 1. Найти *НОД* (180; 168).

Решение. Разложим 180 и 168 на простые множители.
$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$. Наибольшим общим делителем будет произведение простых множителей, входящих в разложение исходных чисел в наименьших степенях. *НОД* (180; 168) = $2^2 \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12.

Пример 2. Какое наибольшее целое число минут может составлять интервал, с которым в течение дня постоянно ходят автобусы одного маршрута, если по расписанию какой-то из них приходит на конечную остановку через 189 минут после прихода самого первого автобуса, еще какой-то – через 243 минуты, а еще какой-то – через 324 минуты?

Решение. По условию задания требуется найти НОД для трех чисел, равных интервальному времени. Как уже было показано в предыдущем примере, получим разложение для $189 = 3^3 \cdot 7$, $243 = 3^5$, $324 = 3^4 \cdot 2^2$. Сравнивая их общие множители, легко увидеть, что *НОД* (189; 243; 324) = $3^3=27$.

Ответ: 27.

Наименьшим общим кратным (*НОК*) нескольких целых чисел называют наименьшее число, которое делится нацело на все данные числа.

Пример 3. Найти *НОК* (180; 168).

Решение. Разложим 180 и 168 на простые множители. В примере 1 было показано, что $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$. Тогда наименьшим общим кратным будет произведение простых множителей, входящих в разложение исходных чисел в наибольших степенях. *НОК* (180; 168) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

Ответ: 2520.

Замечание. Следует отметить, что для двух целых чисел a и b справедливо соотношение *НОД* (a; b) · *НОК* (a; b) = $a \cdot b$. Например, в нашем случае *НОД* (180; 168) · *НОК* (180; 168) = $12 \cdot 2520 = 180 \cdot 168 = 30\,240$.

Отметим некоторые важные свойства наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

Свойство 1. НОД (a; b; c) = *НОД* (*НОД* (a; b); c).

Свойство 2. НОК (a; b; c) = *НОК* (*НОК* (a; b); c).

Свойство 3. НОД (a; b) · *НОК* (a; b) = $a \cdot b$.

Свойство 4. НОД (ka; kb) = k · *НОД* (a; b), где k – натуральное число.

Свойство 5. Если число a не делится на натуральное k, то $НОД\ (k \cdot a; b) = НОД\ (a; b)$.

Свойство 6. $НОД\ (a; 1) = 1$.

Свойство 7. $НОД\ (a; 0) = a$.

Свойство 8. $НОД\ (a; b) = НОД\ (a; b + k \cdot a)$, где k – целое число.

Свойство 8 используется при вычислении наибольшего общего делителя с помощью алгоритма Евклида. Обычно из большего числа вычитают меньшее, умноженное на целое число. Суть алгоритма Евклида при нахождении наибольшего общего делителя (*НОД*) заключается в следующем.

1. Сначала большее число делим на меньшее.
2. Если делится без остатка, то меньшее число и есть *НОД* (следует прекратить решение).
3. Если есть остаток, то большее число заменяем на остаток от деления.
4. Переходим к пункту 1.

Покажем действенность этого алгоритма в примере 4.

Пример 4. Найти $НОД\ (607, 477)$.

Решение. $НОД\ (607; 477) = НОД\ (607 - 477; 477) = НОД\ (130; 477) = НОД\ (130; 477 - 3 \cdot 130) = НОД\ (130; 87) = НОД\ (130 - 87; 87) = НОД\ (43; 87) = НОД\ (43; 87 - 2 \cdot 43) = НОД\ (43; 1) = 1$.

Ответ: 1.

Пример 5. Найти наибольший общий делитель всех десятизначных чисел, состоящих из различных цифр.

Решение. Сумма цифр любого подобного числа, например *1023456789*, делится на *9*. Поэтому все десятизначные числа, состоящие из различных цифр, делятся на *9*. Докажем, что *9* является именно наибольшим общим делителем. Рассмотрим $НОД\ (1023456789; 1023456798) = НОД\ (1023456789; 1023456798 - 1023456789) = НОД\ (1023456789; 9) = 9$. Так как существует пара чисел, для которой наибольший общий делитель равен *9*, то для всего множества таких чисел наибольший общий делитель также равен *9*.

Ответ: 9.

Пример 6. Натуральные числа a и b взаимно просты. Докажите, что наибольший общий делитель чисел $a + b$ и $a^2 + b^2$ равен *1* или *2*.

Решение. $НОД\ (a + b; a^2 + b^2) = НОД\ (a + b; a^2 + b^2 - a \cdot (a + b)) = НОД\ (a + b; b\ (b - a)) = НОД\ (a + b; b - a) = НОД\ (a + b; b - a + a + b) = НОД\ (a + b; 2b) = НОД\ (a + b; 2)$.

По условию задачи числа a и b взаимно просты. Следовательно, числа $a + b$ и b также взаимно просты. Поэтому $НОД\ (a + b; b\ (b - a)) = НОД\ (a + b; b - a)$ и $НОД\ (a + b; 2b) = НОД\ (a + b; 2)$. Если $a + b$ четно, тогда $НОД\ (a + b; 2) = 2$; если число $a + b$ нечетно, тогда $НОД\ (a + b; 2) = 1$.

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. На одной остановке одновременно встретились автобусы трех маршрутов: автобусы первого маршрута ходят в течение дня с интервалом в 24 минуты, второго – с интервалом в 15 минут, а третьего – в 9 минут. Через сколько минут на той же остановке произойдет следующая одновременная встреча тех же трех маршрутов?

Указание к решению: по условию задачи требуется найти *НОК* (24; 15; 9).

Ответ: 360.

Задача 2. Используя алгоритм Евклида, найдите *НОД* (2910; 1182).

Указание к решению: применить алгоритм Евклида в 3 цикла.

Ответ: 6.

Задача 3. Найдите наименьшее общее кратное (*НОК*) для чисел 1095 и 534, используя алгоритм Евклида и свойства *НОД*, *НОК*.

Указание к решению: с помощью алгоритма показать, что *НОД* (1095; 534) = 3, тогда по свойству *НОД* (a; b) · *НОК* (a; b) = $a \cdot b$ найти *НОК* данных чисел.

Ответ: 194 910.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Очень часто при решении олимпиадных заданий приходится иметь дело с линейными уравнениями в целых числах типа $a \cdot x + b \cdot y = c$ (диофантовыми уравнениями), где a, b и c – целочисленные коэффициенты. Будем полагать, что наибольший общий делитель (НОД) чисел a, b и c равен 1 (числа взаимно просты). Взаимно просты также числа a и b. В противном случае уравнение не будет иметь целочисленных решений. Например, уравнение $6 \cdot x + 10 \cdot y = 7$. Левая часть уравнения кратна двум при любых целых x и y, а правая – нет.

Уравнение $a \cdot x + b \cdot y = c$ при озвученных выше условиях будет иметь решение $x = x_0 + b \cdot t$; $y = y_0 - a \cdot t$, где t – целочисленный параметр, а $(x_0; y_0)$ – частное (начальное решение уравнения). При конкретных целочисленных значениях параметра t будут возникать частные целочисленные решения уравнения. Поэтому самым важным моментом при решении уравнения является поиск именно начального решения уравнения.

Пример 1. Решить в целых числах уравнение $5 \cdot x + 6 \cdot y = 17$.

Решение. В этой задаче легко подобрать начальное решение $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.

Ответ: $x = 1 + 6 \cdot t$; $y = 2 - 5 \cdot t$, где t – целое число.

Пример 2. Решить в целых числах уравнение $15 \cdot x - 11 \cdot y = 0$.

Решение. Начальное решение $x_0 = 0$; $y_0 = 0$.

Ответ: $x = 11 \cdot t$; $y = 15 \cdot t$, где t – целое число.

Пример 3. Известно, что a и b – натуральные числа и $47 \cdot a = 28 \cdot b$. Может ли число $a + b$ быть простым?

Решение. $a = 28 \cdot t$; $b = 47 \cdot t$; $a + b = 75 \cdot t$, где t – целое число. Ни при каких натуральных t число $75 \cdot t$ не может быть простым.

Ответ: Нет.

Пример 4. *Задача Фибоначчи.* Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждых трех воробьев заплачена одна монета, за каждых двух горлиц – тоже одна монета и, наконец, за каждого голубя – по две монеты. Сколько было птиц каждой породы?

Решение. Пусть x – количество воробьев, y – количество горлиц, z – количество голубей.

Тогда получим систему $\begin{cases} x + y + z = 30 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + 2z = 30 \end{cases}$

Выразив x из второго уравнения и подставив в первое уравнение, получим $y + 10 \cdot z = 120$, откуда $y = 10 \cdot t$; $z = 12 - t$. Тогда $x = 18 - 9 \cdot t$. Только при $t = 1$ значения x; y и z будут натуральными, т. е. $x = 9$; $y = 10$ и $z = 11$.

Ответ: 9 воробьев, 10 горлиц и 11 голубей.

В случае, когда в уравнении $a \cdot x + b \cdot y = c$ коэффициенты большие и начальное решение подобрать сложно, его можно найти при помощи алгоритма Евклида.

Пример 5. Решить в целых числах уравнение $145 \cdot x - 189 \cdot y = 7$.

Решение. $НОД\ (145; 189) = НОД\ (145; 44) = НОД\ (13; 44) = НОД\ (13; 5) = НОД\ (3; 5) = НОД\ (3; 2) = НОД\ (1; 2) = 1$.

$1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot (13 - 2 \cdot 5) - 5 = 2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 2 \cdot 13 - 5 \cdot (44 - 3 \cdot 13) = 17 \cdot 13 - 5 \cdot 44 = 17 \cdot (145 - 3 \cdot 44) - 5 \cdot 44 = 17 \cdot 145 - 56 \cdot 44 = 17 \cdot 145 - 56 \cdot 44 = 17 \cdot 145 - 56 \cdot (189 - 145) = 73 \cdot 145 - 56 \cdot 189 = 1$.

Таким образом, найдено начальное решение $x_0 = 73$ и $y_0 = 56$ уравнения $145 \cdot x - 189 \cdot y = 1$. Для уравнения $145 \cdot x - 189 \cdot y = 7$ начальное решение будет в 7 раз больше $x_0 = 7 \cdot 73 = 511$ и $y_0 = 7 \cdot 56 = 392$.

Ответ: $x = 511 + 189 \cdot t$; $y = 392 + 145 \cdot t$, где t – целое число.

Приведем пример задачи, при решении которой используют методы поиска решения линейных уравнений в целых числах.

Пример 6. На покупку алых и белых роз было истрачено 500 рублей. Из этого количества было составлено 14 букетов с одинаковым количеством цветков. Известно, что одна алая роза стоит 7 рублей, белая роза стоит 4 рубля. Сколько цветков каждого сорта было куплено?

Решение. Пусть x – количество алых роз, y – количество белых роз. Тогда $7 \cdot x + 4 \cdot y = 500$; $x + y = 14 \cdot n$, где n – число цветков в букете.

В качестве начального решения первого уравнения можно взять $x_0 = 0$ и $y_0 = 125$.

Тогда общее решение первого уравнения будет иметь вид: $x = 4 \cdot t$; $y = 125 - 7 \cdot t$, где t – целое число. Учитывая то обстоятельство, что x и y – натуральные числа, получим ограничения на t: $1 \le t \le 17$. Подставим $x = 4 \cdot t$ и $y = 125 - 7 \cdot t$ во второе уравнение, получим $125 - 3 \cdot t = 14 \cdot n$. Начальным решением уравнения $3 \cdot t + 14 \cdot n = 125$ является $t_0 = 9$ и $n_0 = 7$. Общее решение $t = 9 + 14 \cdot s$; $n = 7 - 3 \cdot s$, где s – некоторое целое число. Учитывая, что t и n – натуральные числа, s может принимать значения 0; 1 и 2. Легко заметить, что только при $s = 0$ значение t попадает в промежуток $1 \le t \le 17$. Значит, имеем при $s = 0$ тогда $n = 7$ и $t = 9$; откуда искомые значения будут $x = 36$ и $y = 62$.

Ответ: 36 алых и 62 белых розы.

Задание для самостоятельной работы

Решить в целых числах уравнение $3 \cdot x - 7 \cdot y = 10$.

Ответ: $x = 1 + 7 \cdot t$; $y = -1 + 3 \cdot t$, где t – целое число.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Примеры, представленные в методических рекомендациях, посвящены разделу олимпиадной математики «Задания на числа». Здесь изложены несколько приемов, которые применяются при решении заданий, как то: алгоритм Евклида для поиска наибольшего общего делителя для нескольких натуральных чисел; поиска частного (начального) решения в линейных диофантовых уравнениях; прием алгебраического сложения уравнений в системе для поиска комбинации неизвестных при решении, хотя сами неизвестные полностью не находятся, и т. п.

При обучении решению олимпиадных заданий важно не рассказывать, как решаются конкретные задачи, а учить идее этих заданий. Ведь каждая олимпиадная задача, по сути своей, некое уникальное изобретение, когда в ней присутствует своя изюминка. Поэтому важно не только показывать обучающимся нестандартность подходов при решении задач, но и приводить их к самостоятельному открытию или к новым знаниям для отыскания решения. Кроме того, можно отметить, что задания олимпиады направлены не на проверку знаний школьной программы, а на выявление интереса школьников к предмету.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Есипова, А. А. Анализ опыта проведения всероссийских предметных олимпиад школьников / А. А. Есипова, А. А. Хохлов. – Текст : непосредственный // Молодой ученый. – 2017. – № 11.2 (145.2). – С. 58–60. – URL: https://moluch.ru/archive/145/40612/ (дата обращения: 07.09.2023).
2. Жмурова, И. Ю. Об истории развития олимпиадного движения по математике / И. Ю. Жмурова, А. Ю. Васильева. – Текст : непосредственный // Молодой ученый. – 2021. – № 45 (387). – С. 211–213. – URL: https://moluch.ru/archive/387/85087/ (дата обращения: 07.09.2023).
3. Нохрин, С. Э. Свердловские математические олимпиады / С. Э. Нохрин, Е. Г. Пыткеев, В. Т. Шевалдин. – Текст : непосредственный // Екатеринбург : Изд-во УрО РАН, 2005. – С. 437.
4. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 27.11.2020 № 678 «Об утверждении Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников» (зарегистрирован 05.03.2021 № 62664). – URL: http://www.consultant.ru/ (дата обращения: 09.09.2023). – Текст : электронный.