Методические рекомендации для школ с низкими результатами по подготовке к ОГЭ по математике

Методические рекомендации

ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
Свердловской области

Министерство образования и молодежной политики Свердловской области

Государственное автономное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования Свердловской области
«Институт развития образования»

Кафедра математики и информатики

Методические рекомендации для школ с низкими результатами по подготовке к ОГЭ по математике

Методические рекомендации

Екатеринбург
2024

ББК 74.202.8
М 54

Рецензенты:
А. П. Бычина, учитель ВКК БМАОУ «Средняя общеобразовательная школа № 55», Березовский ГО;
М. Л. Жигулина, заведующий центра развития управленческих и педагогических команд.

Авторы-составители:
В. Б. Соловьянов, старший преподаватель кафедры математики и информатики ГАОУ ДПО СО «ИРО»;
О. А. Белослудцев, старший преподаватель кафедры математики и информатики ГАОУ ДПО СО «ИРО».

М 54 Методические рекомендации для школ с низкими результатами по подготовке к ОГЭ по математике: методические рекомендации /Министерство образования и молодежной политики Свердловской области, Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования Свердловской области «Институт развития образования», кафедра математики и информатики, авт.-сост. В. Б. Соловьянов, О. А. Белослудцев. – Екатеринбург: ГАОУ ДПО СО «ИРО», 2024. – 34 с.

Настоящие рекомендации посвящены вопросам подготовки школьников к решению заданий Основного государственного экзамена по математике. В рекомендациях рассматривается решение заданий, представленных в банке заданий Федерального Института Педагогических измерений.

Рекомендации предназначены для учителей математики общеобразовательных организаций, преподающих учебный предмет «математика»; учителей, организующих деятельность обучающихся по достижению ими предметных и результатов в соответствии с требованиями обновленных ФГОС ООО.

Утверждено Научно-методическим советом ГАОУ ДПО СО «ИРО» от 25.11.2024 г. № 11

ББК 74.202.8

Оглавление

Введение

Основной государственный экзамен по математике (далее ОГЭ) – это одно из важнейших испытаний для школьников. Экзамен является одним из двух обязательных экзаменов, которые предстоит сдавать учащимся 9-х классов, чтобы получить аттестат по окончании основной школы.

Как экзамен ОГЭ с течением времени может измениться, в частности могут появиться «новые» модели заданий, связанных с задачами практического характера. С введением в программу 7–9-х классов нового учебного курса «Вероятность и статистика» возможно в перспективе появление дополнительной задачи по теории вероятностей, для решения которой необходимо применить не только знания классического определения вероятностей случайных событий, но и умения применять основные теоремы классической теории вероятностей для решения задач. Однако стоит отметить, что основными разделами экзаменационной работы остаются «алгебра» и «геометрия», не меняется и минимальный балл при сдаче экзамена. Оставлен 8-балльный общий порог из которых не менее двух баллов по геометрии, общее количество первичных баллов пока остается на уровне 31.

Начиная с 2020 года, экзаменационная работа состоит из двух частей: 1-я часть включает 19 заданий с кратким ответом базового уровня сложности, среди которых задания №№ 1–14 относятся к модулю «Алгебра», а №№ 15–19 – к модулю «Геометрия». Каждое задание этой части оценивается в 1 балл, при выставлении которого оценивается верная математическая запись ответа, обычно представленного в виде числа, записанного в десятичном виде. Задания базовой части содержат задачи по ключевым разделам математики: числа и вычисления, алгебраические выражения, уравнения, неравенства и системы, числовые последовательности, функции и графики, координаты на прямой и плоскости, геометрия, вероятность и статистика. При решении этих заданий учащиеся показывают уровень овладения базовыми алгоритмами, знаниями и пониманием элементов содержания – математических понятий, изученных фактов и приемов решений стандартных задач. В этой части представлен блок практико-ориентированных заданий №№ 1–5, объединенных общим условием, представленным в виде описания ситуации, взятой из реальной жизни.

В части 2 экзаменационной работы содержатся задания по следующим разделам курса математики: уравнения и неравенства, текстовые задачи, функции и графики, геометрия. Эти шесть задач повышенного и высокого уровня сложности направлены на проверку математической подготовки участников экзамена по владению алгебраическим аппаратом, умению решать задачи с использованием знаний из разных разделов алгебры, а также умению решать планиметрические задачи в несколько действий. Для получения положительных баллов за эти задания необходимо не просто представить верный ответ, но и правильно записать решение с достаточно подробными выкладками. Назначение заданий 2-й части – дифференциация хорошо успевающих школьников по уровню подготовки, выявление той части выпускников 9-х классов, которые перейдут в старшую школу и составят контингент профильных физико-математических, экономических и естественно-научных классов.

В ранее представленных преподавателями кафедры математики и информатики ГАОУ ДПО СО «ИРО», методических разработках, были рассмотрены и даны конкретные рекомендации по методам решения следующих типов заданий:

1) практико-ориентированные задачи на примере моделей «Форматы бумаги» и «Шины» [2];
2) задачи на вычисление вероятностей случайных событий [3];
3) текстовые задачи [4].

Еще ранее в 2018 году были подготовлены методические рекомендации «Не два на ОГЭ» [1], которые определенно сыграли свою роль, но сегодня немного устарели, так как содержали материал, базирующийся на старой модели КИМов ОГЭ по математике, который позднее разработчиками Федерального Института Педагогических Измерений (ФИПИ) был изменен, при этом базовые задания все-таки остались. Еще одним недостатком этих рекомендаций считаем достаточно скупое изложение методических подходов решения заданий. При объеме пособия в 92 страницы следует отметить большое количество заданий для самостоятельного решения в каждом разделе, но всего 15 заданий с подробным решением, из них 7 относятся к курсу «Алгебра», остальные к курсу «Геометрия»

В данной работе авторы рассмотрели задания, аналогичные заданиям открытого банка заданий ОГЭ, взятых на сайте ФИПИ, содержащие задачи разделов учебного предмета «Математика», трудности при решении которых испытывают не менее трети учащихся основной школы.

Настоящие методические рекомендации состоят из введения, двух глав и заключения.

В первой главе рассматриваются приемы по решению заданий учебного курса «Алгебра», составляющие основу курса и связанные с темами «Числа и вычисления», «Уравнения» и текстовые задания на применение физических и других формул, а также на использование последовательностей для решения практических задач (от автора В. Б. Соловьянова).

Во второй главе рассматриваются методические приемы по решению геометрических задач базовой части, необходимых для получения положительного балла при выполнении экзаменационной работы (от автора О. А. Белослудцева).

В заключение даются рекомендации педагогам по организации обучения при подготовке к ГИА выпускников 9-х классов для получения ими хотя бы минимальных баллов, необходимых для положительной оценки на экзамене.

Глава 1. Методические приемы решения заданий учебного курса «Алгебра»

С целью получения хорошего результата на экзамене необходимо правильно выстроить стратегию подготовки к нему с учетом уровня знаний, а также умений и навыков. Если цель сдать экзамен на отметку «3» и уровень подготовки базовый, то нужно уделить внимание заданиям, решение которых обеспечат необходимый минимум баллов. Конечно, для того, чтобы работа над решением задачи стала понятной, учителю необходимо научить обучающихся [4]:

- исследовать текст задания;
- понимать условие (овладеть смысловым чтением) и выделять основной вопрос задачи;
- выделять величины, которые даны в задаче и которые нужно найти;
- находить отношения между элементами;
- переводить вербальную модель задачи в символическую;
- определять, какое количество действий нужно совершить, чтобы ответить на вопрос задачи;
- составлять план решения задачи (рассуждая, анализируя);
- проверять правильность решения задачи.

Также важно совместно проводить анализ затруднений и ошибок, возникающих у обучающихся в процессе решения задач.

Рассмотрим несколько типов задач из контрольно-измерительных материалов ОГЭ по математике, решение которых обеспечивает положительный результат на экзамене.

1.1. Методы решения задания № 6 КИМа ОГЭ

Если придерживаться стандартной структуры КИМа ОГЭ по математике, то после заданий, входящих в блок как практико-ориентированных можно выделить несколько простых заданий в первой части, решение которых несмотря на некоторую простоту, может привести к ошибкам, что в результате приведет к потере баллов по итогам экзамена. Классическая формулировка задания № 6 в последние годы практически не претерпела изменений и в основном связана с действиями либо с обыкновенными дробями, либо с дробями в десятичной форме.

Типичные ошибки, возникающие у школьников при выполнении этого задания, были связаны с невнимательностью при выполнении арифметических действий, путаницей при сложении и вычитании, а также с неверным определением количества знаков после запятой. Эти данные указывают на необходимость усиления работы над развитием вычислительных навыков, формируемых еще в 5–6-х классах, когда на уроках математики отрабатываются приемы действий с дробями.

Разберем стандартный механизм решения такого типа задания.

Пример 1.1. Найдите значение выражения $\frac{2}{25}+\frac{3}{4}$.

Решение. Выполним все вычисления в примере по действиям, в соответствующем порядке.

1. Раскладываем знаменатели на простые множители: 25 = 5·5; 4 = 2·2.
2. Находим наименьшее общее кратное знаменателей:
НОК {25; 4} = 2·2·5·5 = 100.
3. Приводим дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2}{25} = \frac{2\cdot 4}{25\cdot 4} = \frac{8}{100}\,;\ \frac{3}{4} = \frac{3\cdot 25}{4\cdot 25} = \frac{75}{100}\,.$$

4. Складываем дроби: $\frac{8}{100} + \frac{75}{100} = \frac{83}{100}$.
5. Записываем обыкновенную дробь в виде десятичной $\frac{83}{100} = 0{,}83$ и полученный результат вписываем в ответ.

Ответ: 0,83.

Замечание. Данный способ решения является стандартным и может применяться в случае, когда приходится находить разность дробей.

Пример 1.2. Найдите значение выражения $\frac{9}{5} : \frac{3}{2}$.

Решение. Основным моментом в решении этого задания является известное правило деления дробей, а именно: необходимо выполнить следующую последовательность действий: *числитель первой дроби умножается на знаменатель второй дроби, результат произведения записать в числитель новой дроби; знаменатель первой дроби умножить на числитель второй дроби и результат записать в знаменатель новой дроби*.

В нашем примере это будет выглядеть так

$$\frac{9}{5} : \frac{3}{2} = \frac{9}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9\cdot 2}{5\cdot 3} = \frac{18}{15}.$$

Для окончательно ответа, который можно записать в бланк ответов на экзамене, остается сначала сократить получившуюся дробь (числа 18 и 15 делятся на 3), а затем и числитель, и знаменатель сокращенной дроби умножить на одно и тоже число (на 2), так, чтобы в знаменателе стояло 10 для окончательного ответа, то есть $\frac{18}{15} = \frac{6\cdot 3}{5\cdot 3} = \frac{6}{5} = \frac{6\cdot 2}{5\cdot 2} = \frac{12}{10} = 1{,}2$.

Ответ: 1,2.

Пример 1.3. Найдите значение выражения $\frac{12{,}6}{0{,}8}$.

Решение. Данное задание можно решить аналогично предыдущему случаю, так как в нем имеется деление двух дробей, записанных в десятичном виде, то есть если выражение записать в форме $12{,}6 : 0{,}8 = \frac{126}{10} : \frac{8}{10}$.

В принципе решение приведет к правильному ответу, но будет несколько громоздкое. Проще решение получить, умножив числитель и знаменатель на 10 и проведя необходимые преобразования: $\frac{12{,}6}{0{,}8} = \frac{12{,}6\cdot 10}{0{,}8\cdot 10} = \frac{126}{8} = \frac{63\cdot 2}{4\cdot 2} = \frac{63}{4}$.

Для получения ответа в десятичном виде, умножим числитель и знаменатель дроби на 25, чтобы в знаменателе стояло 100, тогда получим

$$\frac{63}{4}=\frac{63\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{1575}{100}=15{,}75.$$

Ответ: 15,75.

В демонстрационном варианте ОГЭ по математике на 2025 год приведена несколько иная формулировка типового задания № 6 по теме «Числа и вычисления», решение которого прокомментируем в следующем примере.

Пример 1.4. Представьте выражение $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}$ в виде дроби со знаменателем 70. В ответ запишите числитель полученной дроби.

Решение. Надо сказать, что представленная задача имеет более простое условие, в сравнении с заданием, в котором требуется найти разность двух обыкновенных дробей, так как в ней не требуется записать ответ в десятичном виде, как это предусмотрено правилами оформления ответов на ОГЭ по математике. Поэтому алгоритм, изложенный ранее (см. пример 1.1), здесь можно не применять, а провести соответствующие действия:

1. Берем в качестве общего знаменателя двух дробей произведение их знаменателей, то есть $5\cdot 7 = 35$, тогда дроби запишем в виде
$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{21}{35},\quad \frac{2}{7}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{10}{35}.$$
2. Вычитаем дроби $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{21}{35}-\frac{10}{35}=\frac{11}{35}$.
3. Так как знаменатель последней дроби в два раза меньше 70 (70:2=35), умножаем числитель и знаменатель получившийся дроби на 2, то есть $\frac{11}{35}=\frac{11\cdot 2}{35\cdot 2}=\frac{22}{70}$, соответственно 22 – это числитель дроби со знаменателем 70.

Ответ: 22.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения (ответ представить в десятичном виде):
   1.1) $\frac{8}{25}-\frac{3}{10}$; 1.2) $\frac{5}{12}+\frac{1}{3}$; 1.3) $\frac{5}{6}:\frac{2}{9}$; 1.4) $\frac{9}{8}\cdot\frac{6}{5}$; 1.5) $\frac{15{,}9}{1{,}2}$.
2. Представьте выражение $\frac{9}{13}+\frac{2}{5}$ в виде дроби с числителем 142. В ответ запишите знаменатель получившейся дроби.
3. Представьте выражение $\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{12}$ в виде дроби со знаменателем 297. В ответ запишите числитель получившейся дроби.

Ответы:

1.1) 0,02; 1.2) 0,75; 1.3) 3,75; 1.4) 1,35; 1.5) 13,25.
2) 130. 3) 126.

1.2. Методические аспекты решения задания № 8 КИМа ОГЭ

Задание № 8 в отличие от задачи № 6 в течение последних лет для выпускников основной школы вызывает трудности в решении, хотя также является заданием базового уровня сложности.

Большинство ошибок, допускаемых при выполнении данного задания связано с непониманием действий с буквенным выражением, а также незнанием свойств степени и неумением их применить для упрощения выражения.

Особенность этой задачи состоит в том, что ответ надо также записать в десятичном виде, при этом в условии фигурирует алгебраическое выражение, содержащее помимо чисел, еще и выражение с переменными, которые впоследствии принимают некоторые значения.

Основы работы с буквенными выражениями должны закладываться на уроках математики в 6-х классах, а впоследствии уже на уроках учебного курса «Алгебры» в 7–8-х классах, в частности при освоении приемов применения формул сокращенного умножения для упрощения выражений. Кроме того, следует отметить, что в условии таких заданий часто используются рациональные дроби, содержащие степени, поэтому важно обратить внимание на использование свойств степени, которые содержатся в справочном материале КИМов ОГЭ.

Рассмотрим несколько примеров, которые можно использовать для повторения при подготовке к ОГЭ по математике.

Пример 2.1. Найдите значение выражения $a^{-10} \cdot (a^4)^3$ при $a = 3$.

Решение. Для решения этого примера можно использовать один из двух приемов, а именно: сначала упростить выражение, воспользовавшись свойствами степени (при возведении степень в степень показатели степеней перемножаются, при умножении выражений с одинаковым основанием показатели степени складываются), то есть

$$a^{-10} \cdot (a^4)^3 = a^{-10} \cdot a^{4 \cdot 3} = a^{-10+12} = a^2.$$

После этого можно подставить вместо a значение 3 и получить окончательный ответ для выражения $a^2 = 3^2 = 9$. Второй способ решения этого задания основывается просто на подстановке значения 3 вместо буквы, который лучше не использовать, так как приводит к громоздким вычислениям, в частности возведением в степень сначала числа 3, а затем, зная, что $3^4 = 81$, еще и числа 81 в третью степень.

Ответ: 81.

Пример 2.2. Найдите значение выражения $a^{12} \cdot a^8 : a^{15}$ при $a = 2$.

Решение. Как и в предыдущем примере, используем те же свойства степеней, за одним исключением при делении выражений с одинаковым основанием показатели степени вычитаются, поэтому имеем

$$a^{12} \cdot a^8 : a^{15} = a^{12+8} : a^{15} = a^{20-15} = a^5.$$

Далее, подставив вместо a число 2, получим $a^5 = 2^5 = 32$.

Ответ: 32.

Пример 2.3. Найдите значение выражения $\sqrt{a^6 \cdot (-a)^2}$ при $a = 4$.

Решение. Для получения ответа удобнее сначала преобразовать выражение под знаком арифметического корня, когда получится общая степень для переменной, то есть $a^6 \cdot (-a)^2 = a^6 \cdot a^2 = a^{6+2} = a^8$.

Затем можно воспользоваться свойством корня (при извлечении арифметического корня степени выражения становятся меньше ровно в два раза) $\sqrt{a^8} = a^4$. Если в последнее выражение подставить значение переменной, то получится окончательный ответ: $4^4 = 256$.

Ответ: 256.

Замечание. Следует отметить, что обычно учащиеся при преобразованиях допускают ошибку при извлечении корня, не обращая внимание на показатель степени, а именно, если по условию имеем $\sqrt{a^6}$, то выражение принимает значение $|a|^3$, а не просто a^3, так как по условию переменная может принимать отрицательные значения.

Пример 2.4. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{1}{25} \cdot x^8 y^4}$ при $x = 2$, $y = 5$.

Решение. Так, арифметический корень из произведения равен произведению корней из каждого множителя, и, учитывая по необходимости замечание к примеру 2.3, данное выражение преобразуется к виду

$$\sqrt{\frac{1}{25} \cdot x^8 y^4} = \sqrt{\frac{1}{25}} \cdot \sqrt{x^8} \cdot \sqrt{y^4} = \frac{1}{5} \cdot x^4 \cdot y^2.$$

Для ответа подставим в полученное выражение значения переменных, тогда имеем $\frac{1}{5} \cdot x^4 \cdot y^2 = \frac{1}{5} \cdot 2^4 \cdot 5^2 = 16 \cdot 5 = 80$.

Ответ: 80.

Более простые по структуре задачи встречаются в задании 8, когда не используются буквенные переменные, а в условии фигурирует числовое выражение.

Пример 2.5. Найдите значение выражения $\sqrt{7 \cdot 3^2} \cdot \sqrt{7 \cdot 5^4}$.

Решение. Сведем выражение к одному арифметическому корню, тогда получим $\sqrt{7 \cdot 3^2} \cdot \sqrt{7 \cdot 5^4} = \sqrt{7^2 \cdot 3^2 \cdot 5^4} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^4} = 7 \cdot 3 \cdot 5^2$. Окончательно имеем $7 \cdot 3 \cdot 5^2 = 21 \cdot 25 = 525$.

Ответ: 525.

Пример 2.6. Найдите значение выражения $(\sqrt{13} - 2)(\sqrt{13} + 2)$.

Решение. Для получения ответа проще всего воспользоваться формулой сокращенного умножения – *разность квадратов*, тогда легко получить

$$(\sqrt{13} - 2)(\sqrt{13} + 2) = \sqrt{13}^2 - 2^2 = 13 - 4 = 9.$$

Ответ: 9.

Пример 2.7. Найдите значение выражения $\frac{11^4 \cdot 2^6}{22^3}$.

Решение. Так как 22 = 11·2, тогда знаменатель дроби можно переписать в виде $22^3 = 11^3 \cdot 2^3$. Подставив в данное числовое выражение степень, можно записать дробь в произведение сократимых дробей и потом получить искомый ответ

$$\frac{11^4 \cdot 2^6}{22^3} = \frac{11^4 \cdot 2^6}{11^3 \cdot 2^3} = \frac{11^4}{11^3} \cdot \frac{2^6}{2^3} = 11^{4-3} \cdot 2^{6-3} = 11 \cdot 2^3 = 11 \cdot 8 = 88.$$

Ответ: 88.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения:

1.1) $\frac{2^7}{32}$; 1.2) $\frac{1}{3^5} \cdot \frac{1}{3^{-8}}$; 1.3) $\frac{\sqrt{35} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{21}}$; 1.4) $(\sqrt{36} - \sqrt{4}) \cdot \sqrt{4}$.

2. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{16a^6}{a^2}}$ при a = 5.

3. Найдите значение выражения $\sqrt{9x^6 \cdot y^4}$ при x = 3, y = 4.

4. Найдите значение выражения $\frac{a^{13} \cdot b^{10}}{(a \cdot b)^{10}}$ при a = 2, b = 3.

Ответы:

1.1) 4; 1.2) 27; 1.3) 5; 1.4) 8.
2) 100. 3) 1296. 4) 8.

1.3. Методические приемы решения уравнений задания № 9 КИМа ОГЭ по математике

Тема «Рациональные уравнения» является одной из основных тем, на которых базируется учебный предмет Математика в общеобразовательной школе. Уже в программе 6-х классов встречаются задачи, для решения которых необходимы навыки вычисления, связанные с линейными уравнениями вида $a \cdot x = b$.

Стоит отметить, что ошибки при решении линейного уравнения на экзамене были вызваны неумением проводить правильно тождественные преобразования, например, перенос слагаемых из одной части равенства в другую часть. Также допускались ошибки при выполнении арифметических действий, например, делении одного целого числа на другое. Эти ошибки показывают, что к концу 9-го класса часть школьников забывает стандартный алгоритм решения такого уравнения.

В 8-м классе встречаются задачи, приводящие к квадратным уравнениям вида $ax^2+bx+c=0$ *и даже более сложным конструкциям уравнений так называемым дробно-рациональным. Как показал прошедший экзамен в 2024 году, не справившиеся участники не смогли воспользоваться справочным материалом для нахождения дискриминанта уравнения и его корней и/или допустили вычислительные ошибки.*

Кроме того, возможные ошибки были при неучете отбора корней по дополнительному условию в задаче; неверным извлечением арифметического *корня, так как в некоторых вариантах квадратное уравнение было неполным и его решением можно получить, не вычисляя дискриминант.*

Ниже рассмотрим некоторые способы решения двух основных видов задания № 9:

1) линейные уравнения и подобные им;
2) квадратные уравнения.

Пример 3.1. *Найдите корень уравнения* $3x + 21 = 12 + 4x$.

Решение. Покажем на примере этого уравнения общий алгоритм решения такого типа уравнений, в том или ином виде он применяется для любого линейного уравнения.

1. Перенесем все члены, содержащие неизвестные, влево, все остальные слагаемые вправо

$$3x - 4x = 12 - 21.$$

2. Выполним приведение подобных в каждой части уравнения

$$-x = -9.$$

3. Разделим обе части на коэффициент при x (в нашем случае –1):

$$x = \frac{-9}{-1} = 9.$$

4. Запишем ответ в виде полученного числа, то есть 9.

Пример 3.2. Найдите корень уравнения $5\cdot(x+4) = -6$.

Решение. Данное уравнение можно решить двумя способами. Решение по первому способу основано на раскрытие скобок и проведение дальнейших шагов как в примере 3.1, то есть сначала получается $5x + 5\cdot 4 = -6$. Далее получим $5x = -6 - 20$, откуда после деления на коэффициент 5 имеем $x = \frac{-26}{5} = -5{,}2$. Другим способом можно сразу разделить обе части уравнения на 5 и получить $x + 4 = -\frac{6}{5} = -1{,}2$. Тогда для окончательного ответа останется перенести 4 в правую часть и получить, что $x = -1{,}2 - 4 = -5{,}2$.

Ответ: – 5,2.

Пример 3.3. Найдите корень уравнения $\frac{1}{x+8} = 4$.

Решение. Несмотря на то, что уравнение содержит дробь, знаменатель которой зависит от неизвестного, это уравнение легко сводится к линейному, если умножить обе части на $x+8$, тогда получим $4\cdot(x + 8) = 1$. Далее решение аналогично примеру 3.2, поэтому имеем $4\cdot x+4\cdot 8 = 1$, откуда $4\cdot x = 1 - 32$. Приведя подобные и поделив обе части на 4, окончательно получим $x = -\frac{31}{4} = -7{,}75$.

Ответ: – 7,75.

Пример 3.4. Найдите корень уравнения $(x+5)^2 = (x-8)^2$.

Решение. Казалось бы, что если уравнение содержит неизвестное во второй степени, то мы имеем квадратное уравнение. Однако можно заметить, что, применяя формулы сокращенного умножения (квадрат суммы и разности) и затем приводя подобные, полученное уравнение становится линейным, так как

$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$, $(x-8)^2 = x^2 - 16x + 64$, откуда

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 - 16x + 64 \text{ или } 10x + 25 = -16x + 64.$$

Получившееся уравнение по структуре аналогично примеру 3.1, поэтому применимы те же действия:

1) переносим слагаемые с неизвестными влево, остальные вправо

$$10x + 16x = 64 - 25;$$

2) выполним приведение подобных в каждой части уравнения

$$26x = 39;$$

3) разделим обе части на коэффициент при x

$$x = \frac{39}{26} = \frac{13 \cdot 3}{13 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Замечание. Исходное уравнение можно решить другим преобразованием, если перенести квадрат разности влево и потом воспользоваться формулой сокращенного умножения – разность квадратов, тогда получится:

$$(x+5)^2 - (x-8)^2 = 0 \text{ или } (x+5-(x-8))(x+5+x-8) = 0.$$

Далее $13(2x-3) = 0$, откуда $2x = 3$ или $x = 1{,}5$.

Как уже говорилось в начале раздела, кроме уравнений, сводящихся к линейным, в задании № 9 КИМов встречаются квадратные уравнения, о методах решения которых речь пойдет ниже.

Пример 3.5. Решите уравнение $2x^2 + 3x + 1 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

Решение. Для отыскания корней квадратного уравнения наиболее логичным способом решения является проведение вычислений с помощью дискриминанта и формулы отыскания корней, так как в КИМах ОГЭ в прилагаемых справочных материалах данные формулы имеются. Для их применения вначале следует определить значения коэффициентов a, b, c по условию задания: в данном примере a=2, b=3, c=1. Следующим шагом вычисляется дискриминант $D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt{9-8} = 1$. В силу того, что дискриминант положительный, то уравнение имеет два корня, значения которых вычисляются по формулам $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$. В нашем примере тогда получится $x_1 = \frac{-3-\sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1$; $x_2 = \frac{-3+\sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-2}{4} = -0{,}5$.

Важно отметить, что в условии задачи идет речь не просто найти корни уравнения, а еще сделать отбор по условию: в ответ записать больший корень, поэтому надо в ответ записать значение –0,5 в силу неравенства –0,5 > –1.

Ответ: –0,5.

Замечание. Следует отметить, что корни квадратного уравнения можно найти, используя теорему Виета. Важным условием ее применения является, что дискриминант $D \geq 0$. Однако, удобнее ее применять, когда квадратное уравнение является приведенным, то есть при a=1, и в данном примере может вызвать определенные сложности. К этому примеру лучше применить свойство коэффициентов $a+c = b$ (2+1 = 3), тогда один из корней равен $x_1 = -1$, для другого корня условия из теоремы Виета будет выглядеть

$$x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

Пример 3.6. Решите уравнение $x^2 = 6x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Решение. Так как данное уравнение является неполным квадратным уравнением, то более просто можно найти корни, перенеся слагаемое из правой части влево, а затем вынести за скобки общий множитель x : $x^2 - 6x = 0$ или $x(x-6) = 0$. Следующим шагом разбиваем на два равносильных уравнения: $x = 0$; $x-6 = 0$; откуда получим два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = 6$. Так как 0<6, то в ответ задания записывается значение 0.

Ответ: 0.

Пример 3.7. Решите уравнение $x^2 = 25$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

Решение. Корни представленного уравнения определяются из равенств $x_1 = \sqrt{25} = 5$ и $x_2 = -\sqrt{25} = -5$. В качестве ответа задачи выбирается число 5, так как по условию положительное число всегда больше отрицательного.

Ответ: 5.

Замечание. Данное уравнение можно было решить, сначала перенеся слагаемое из правой части влево, и затем воспользоваться формулой сокращенного умножения (разность квадратов): $x^2 - 25 = 0$ или $(x-5)(x+5) = 0$. Разбивая на два равносильных уравнения, получаются искомые корни.

Пример 3.8. Решите уравнение $x^2 + 10 = 7x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Решение. Для применения формул отыскания корней уравнения, а также например, использовать и другой способ решения обязательным условием является приведение квадратного уравнения к стандартному виду $ax^2+bx+c=0$, поэтому здесь необходимо перенос слагаемого $7x$ влево, причем его необходимо поставить сразу после слагаемого x^2, тогда получим $x^2 - 7x + 10 = 0$. Так как полученное уравнение является приведенным, то можно найти его корни по теореме Виета: если квадратное уравнение $x^2+px+q= 0$ имеет решение, то его корни удовлетворяют системе $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$. Так как по условию задачи $p = -7$, $q = 10$, то получим систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 \cdot x_2 = 10 \end{cases}$. Решение системы легко подбирается, если взять $x_1 = 2$; $x_2 = 5$. Меньшим корнем из них является 2.

Ответ: 2.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите корень уравнения

1.1) $3 \cdot x - 5 = 2 \cdot x + 1$; 1.2) $2 \cdot (x - 4) = -3$; 1.3) $(x + 2)^2 = (5 - x)^2$.

2. Решите уравнение $(8x - 4)\cdot(-x + 2) = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.
3. Решите уравнение $x^2 + x = 12$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.
4. Решите уравнение $x^2 - 64 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.
5. Решите уравнение $5\cdot x^2 + 4x - 1 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Ответы:

1.1) 6; 1.2) 2,5; 1.3) 1,5.
2) 2. 3) –4. 4) 8. 5) –1.

1.4. Методы решения задания № 12 КИМа ОГЭ

С введением новой модели КИМов ОГЭ по математике около пяти лет назад одной из достаточно простых заданий остается задача с номером 12, условие которой базируется на применении формулы, взятой либо из учебного предмета «Физика», либо по учебному курсу «Геометрия». Как правило, решение этого задания основывается на подстановке в формулу числовых значений величин и применении стандартных тождественных преобразований.

Типичные ошибки при выполнении этого задания носят, как правило, вычислительный характер, а также связаны с неумением правильно применить свойства дробей.

В качестве примеров рассмотрим несколько задач такого типа.

Пример 4.1. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P = I^2 \cdot R$, где I – сила тока (в амперах), R – сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R, если мощность составляет 128 *Вт*, а сила тока равна 4 *А*. Ответ дайте в омах.

Решение. Если в эту формулу вместо мощности P подставить значение 128, а вместо силы тока I число 4, тогда получится следующее уравнение
$128 = 4^2\cdot R$, где неизвестным является сопротивление R.

Для получения ответа на вопрос задачи остается поделить обе части равенства на $16 = 4^2$, тогда имеем

$$R = \frac{128}{16} = 8.$$

Таким образом, получилось, что сопротивление постоянного тока равно 8 Ом.

Ответ: 8.

Замечание. Значение сопротивления можно было получить, если в исходной формуле выразить R через мощность P и силу тока I, то есть $R = \frac{P}{I^2}$, а потом подставить в последнее равенство значения 128 и 4 соответственно.

Пример 4.2. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле $a = \omega^2\cdot R$, где ω – угловая скорость (в с$^{-1}$), R – радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R, если угловая скорость равна 5,5 c^{-1}, а центростремительное ускорение равно 181,5 м/c^2. Ответ дайте в метрах.

Решение. Для нахождения значения радиуса окружности воспользуемся замечанием из предыдущего примера, а именно выразим R из формулы $R = \frac{a}{\omega^2}$. Далее подставим значения 181,5 вместо a и 5,5 вместо ω, тогда получим

$$R = \frac{181{,}5}{5{,}5^2} = \frac{181{,}5}{30{,}25} = 6 \text{ (м)}.$$

Ответ: 6.

Пример 4.3. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F = 1{,}8 \cdot t_C + 32$, где t_C − температура в градусах Цельсия, t_F − температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует −15 градусов по шкале Цельсия?

Решение. В отличие от предыдущих примеров данная задача решается проще, в ней достаточно подставить значение температуры по шкале Цельсия в правую часть равенства и выполнить необходимые вычисления:

$$t_F = 1{,}8 \cdot t_C + 32 = 1{,}8 \cdot (-15) + 32 = -27 + 32 = 5.$$

Ответ: 5.

Замечание. В КИМах ОГЭ встречается задание на обратное соотношение, когда выражена температура по шкале Цельсия через температуру по шкале Фаренгейта $t_C = \frac{5}{9} \cdot (t_F - 32)$, которое также решается простой подстановкой числового значения температуры.

Пример 4.4. Площадь четырехугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\alpha$, где d_1 и d_2 − длины диагоналей четырехугольника, α − угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_2, если $d_1 = 6$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, а $S = 17$.

Решение. Данное задание можно решить одним из двух способов:

1-й способ решения основан на подстановке в формулу значений величин и после проведения вычислений решение получившегося уравнения, то есть $17 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot d_2 \cdot \frac{1}{3}$, при этом можно заметить, что ответ получается легко $17 = d_2$;

2-й способ решения использует преобразование формулы, чтобы выразить искомую диагональ, а затем проведение соответствующих вычислений

$$d_2 = \frac{2 \cdot S}{d_1 \cdot \sin\alpha} = \frac{2 \cdot 17}{6 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{34}{2} = 17.$$

Ответ: 17.

Замечание. При решении подобного задания выбирается один из представленных двух способов.

Задания для самостоятельного решения

1. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 5500 + 4600 \cdot n$, где n − число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, найдите стоимость колодца из 8 колец, ответ запишите в рублях.
2. Чтобы перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия пользуются формулой

$$t_C = \frac{5}{9} \cdot (t_F - 32),$$

где t_C − температура в градусах Цельсия, t_F − температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 176 градусов по шкале Фаренгейта?

3. Площадь четырехугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot sin\alpha,$$

где d_1 и d_2 − длины диагоналей четырехугольника, α − угол между диагоналями.

Пользуясь этой формулой, найдите $sin\alpha$, $S = 21$, $d_1 = 15$, $d_2 = 7$.

Ответы:

1) 42300. 2) 80. 3) 0,4.

1.5. Методические приемы решения задания № 14 КИМа ОГЭ

Задание данного типа относятся к текстовым задачам на применение формул числовых последовательностей – набора чисел, расположенных в определенном порядке. Чаще всего выделяют последовательности специального вида – прогрессии, среди которых рассмотрим так называемые *арифметическую* и *геометрическую* прогрессии, причем для применения которых на экзамене не надо запоминать соответствующие формулы как общего члена n-го порядка, так и суммы S_n первых n членов, так как они приведены в справочном материале КИМов ОГЭ по математике. Поэтому важным моментом при выполнении задания № 14 является умение по условию задачи, понять какой вид прогрессии имеется, какие данные известны, и только потом использовать необходимые вычисления для получения ответа.

Ошибки, допускаемые обучающимися, в основном носят вычислительный характер и связаны с тем, что ученики или не смогли определить нужные значения для подстановки в формулу, или выполнили подстановку неверно, или же не сумели воспользоваться справочными материалами. Хотелось бы, чтобы при изучении темы «Последовательности» в 9-м классе учитель больше внимания уделял формированию умения рассуждать, сопоставлять ситуацию, описанную в учебной задаче и формулы той или иной прогрессии.

Приведем примеры заданий, подобных задачам из Открытого банка ОГЭ, размещенным на сайте ФИПИ.

Пример 5.1. В амфитеатре 15 рядов, причем в каждом следующем ряду на одно и то же число мест больше, чем в предыдущем. В четвертом ряду 27 мест, а в седьмом ряду 36 мест. Сколько мест в последнем ряду амфитеатра?

Решение. Количество мест в ряду амфитеатра представляет собой арифметическую прогрессию с известными четвертым членом $a_4 = 27$ и седьмым $a_7 = 36$. Для ответа на вопрос задания необходимо применить формулу ее общего члена, в данном примере это $a_{15} = a_1 + d\cdot(15 - 1)$, где a_1 – первый член, d – разность прогрессии. Так как 4-й и 7-й члены арифметической прогрессии связаны равенством $a_7 = a_4 + 3\cdot d$, то для разности имеем $d = \frac{a_7 - a_4}{3} = \frac{36-27}{3} = \frac{9}{3} = 3$, тогда из соотношения $a_4 = a_1 + 3\cdot d$ можно найти первый член прогрессии $a_1 = a_4 - 3\cdot d = 27 - 9 = 18$. Отсюда для пятнадцатого ряда получится $a_{15} = a_1 + 14\cdot d = 18 + 14\cdot 3 = 18 + 42 = 60$.

Ответ: 60.

Замечание. Количество мест в последнем ряду можно найти не находя число мест в первом ряду, если выразить n член через 4-й или 7-й член прогрессии: $a_n = a_4 + d\cdot(n - 4)$ или $a_n = a_7 + d\cdot(n - 7)$.

Пример 5.2. Камень бросают в глубокое ущелье. При этом в первую секунду он пролетает 8 метров, а в каждую следующую секунду на 10 метров больше, чем в предыдущую, до тех пор, пока не достигнет дна ущелья. Сколько метров пролетит камень за первые шесть секунд?

Решение. Исходя из условия задачи, требуется найти путь камня при падении в ущелье за первые шесть секунд. По смыслу скорость камня увеличивается и представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом 8 и разностью 10. Тогда за шестую секунду камень пролетит $a_6 = a_1 + d\cdot(6 - 1) = 8 + 10\cdot 5 = 58$ метров. Так как по формуле суммы первых шести членов прогрессии $S_6 = \frac{a_1 + a_6}{2}\cdot 6$, откуда $S_6 = \frac{8+58}{2}\cdot 6 = (4+29)\cdot 6 = 198$ м.

Ответ: 198.

Замечание. Искомое расстояние можно было найти, если воспользоваться из учебника формулой суммы первых n членов прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n$, где $n = 6$, $a_1 = 8$, $d = 10$.

Пример 5.3. При проведении опыта вещество равномерно охлаждали в течение 8 минут. При этом каждую минуту температура вещества уменьшалась на 9°C. Найдите температуру вещества (в градусах Цельсия) через 6 минут после начала проведения опыта, если его начальная температура составляла −7°C.

Решение. По условию задачи значения температуры вещества составляют арифметическую прогрессию. При этом температура вещества в начальный момент времени будет первым членом прогрессии, температура вещества через одну минуту − вторым членом, а температура вещества через 6 минут − седьмым членом прогрессии, следовательно, она может быть найдена по формуле $a_7 = a_1 + d\cdot(7 - 1)$, где $a_1 = -7$, $d = -9$. Тогда получим $a_7 = -7 - 9\cdot 6 = -61$ (°C).

Ответ: −61.

Замечание. Данную задачу можно решить без использования формулы прогрессии, а простым логическим рассуждением: через минуту температура вещества станет −7−9 = −16 градусов, через две минуты −16−9 = −23 и т. д. Это необходимо проделать шесть раз и тогда получится искомый ответ. Кроме того, следует отметить, что в задании не используется полное время охлаждения (8 минут) и является так называемым *избыточным* условием.

Пример 5.4. В ходе биологического эксперимента в чашку Петри с питательной средой поместили колонию микроорганизмов массой 17 мг. За каждые 30 минут масса колонии увеличивается в 2 раза. Найдите массу колонии микроорганизмов через 90 минут после начала эксперимента. Ответ дайте в миллиграммах.

Решение. По условию задачи требуется найти массу микроорганизмов через 90 минут, если каждые 30 минут их количество увеличивается вдвое. Так как в 90 минутах период в 30 минут содержится ровно три раза, то получить ответ можно следующим образом: через первые 30 минут масса колонии станет 17·2 = 34 (мг), через 60 минут − 34·2 = 68 (мг), а тогда через 90 минут – 68·2 = 136 (мг).

Ответ: 136.

Замечание. Следует отметить, что данное задание можно решить другим способом, используя то, что массы колонии микроорганизмов в определенные моменты времени представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Масса колонии в начальный момент времени является первым членом прогрессии, масса микроорганизмов через 30 минут – второй член прогрессии, а масса через 90 минут – четвертый член прогрессии и может быть определен по формуле $b_4 = b_1 \cdot q^{4-1}$ (в нашем случае $b_4 = 17 \cdot 2^3$).

Пример 5.5. У Тани есть теннисный мячик. Она со всей силы бросила его об асфальт. После первого отскока мячик подлетел на высоту 360 см, а после каждого следующего отскока от асфальта подлетал на высоту в три раза меньше предыдущей. После какого по счету отскока высота, на которую подлетит мячик, станет меньше 16 см?

Решение. Изменение высоты отскока мячика является геометрической прогрессией с первым членом b_1 = 360 см и знаменателем $q = \frac{1}{3}$. По формуле n – го члена $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ найдем, после какого по счету отскока высота, на которую подлетит мячик, станет меньше 16 см.

$$b_n < 16 \Leftrightarrow 360 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < 16 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{2}{45}.$$

Значение n подбирается перебором, например, при $n = 3$ имеем

$\left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{1}{9} = \frac{5}{45} > \frac{2}{45}$ – не подходит. Если n = 4, тогда

$\left(\frac{1}{3}\right)^{4-1} = \frac{1}{27} = \frac{2}{54} < \frac{2}{45}$.

Следовательно, $n = 4$ – минимальное целое значение, которое удовлетворяет неравенство, то есть когда высота отскока мяча станет меньше 16 см.

Ответ: 4.

Задания для самостоятельного решения

1. В амфитеатре 14 рядов. В первом ряду 20 мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в амфитеатре?
2. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается вдвое каждые 7 минут. В начальный момент масса изотопа составляла 640 мг. Найдите массу изотопа через 35 минут. Ответ дайте в миллиграммах.
3. У Ксюши есть попрыгунчик (каучуковый шарик). Она со всей силы бросила его об асфальт. После первого отскока попрыгунчик подлетел на высоту 480 см, а после каждого следующего отскока от асфальта подлетал на высоту в два раза меньше предыдущей. После какого по счету отскока высота, на которую подлетит попрыгунчик, станет меньше 10 см?

Ответы:

1) 462. 2) 20. 3) 7.

Глава 2. Методические приемы решения заданий учебного курса «Геометрия»

При подготовке к ОГЭ по математике следует помнить, что из минимальных восьми первичных баллов как минимум два должны быть по геометрии. В счет геометрии зачитываются задания с кратким ответом № 15; 16; 17; 18 и 19 и задания с развернутым ответом № 23; 24 и 25. Все задания с кратким ответом оцениваются максимально в один, а задания с развернутым ответом – в два первичных балла.

Таким образом, два первичных балла необходимо набрать из тех 11 баллов, которые относятся к геометрическим заданиям. Следует помнить, что практико-ориентированные задания № 1–5, согласно кодификатору и спецификации КИМ ОГЭ, к геометрическим заданиям не относятся, даже если при решении некоторых из них используется геометрический аппарат. К сожалению, нередки случаи, когда участники экзамена, набрав больше семи баллов, получили неудовлетворительный результат из-за геометрии. Очень часто в геометрических задачах ОГЭ по математике встречаются моменты, которые не отражены в учебниках. Речь идет о базовых понятиях, которые в учебниках либо отсутствуют, либо изложены недостаточно полно. Этот недостаток имеет учебник Л. С. Атанасяна, несмотря на то, что, судя по отметке о соответствии требованиям ФГОС, в нем отсутствуют многие теоремы, знание которых необходимо для успешной сдачи ОГЭ по математике. Некоторые теоремы в учебнике изложены в виде задач, которые можно легко пропустить.

Рекомендуем учителям при подготовке к геометрии учитывать наличие справочных материалов, прилагаемых к КИМу ОГЭ по математике. Справочные материалы должны быть распечатаны и активно использоваться обучающимися при подготовке к экзамену. Выпускники должны знать, что справочные материалы содержат сведения о средней линии в треугольнике и трапеции, площади, высоте, радиусах вписанной и описанной окружностей в правильном треугольнике, длине окружности и площади круга. В справочных материалах есть основные формулы для вычисления площади треугольника, параллелограмма, трапеции и ромба, формулировки теорем Пифагора, синусов и косинусов, сведения из тригонометрии и таблица некоторых значений тригонометрических функций.

Согласно спецификации КИМ ОГЭ, задания с кратким ответом № 15–18 нацелены на проверку умений применять формулы периметра и площади многоугольников, длины окружности и площади круга, умение применять признаки равенства треугольников, теорему о сумме углов треугольника, теорему Пифагора, тригонометрические соотношения для вычисления длин, расстояний, площадей.

Задание № 19 нацелено на умения распознавать истинные и ложные высказывания. Для успешного выполнения большинства заданий типа 17, 18 и 19 достаточно справочных материалов (за редким исключением). При подготовке к экзамену, особенно выпускникам из группы риска, следует сосредоточиться в первую очередь именно на этих заданиях. Однако для успешного выполнения всех геометрических заданий, особенно с развернутым ответом, справочных материалов недостаточно. Необходимо знать признаки подобия и равенства треугольников, свойства вписанных и описанных четырехугольников, соотношения между вписанными и центральными углами и т. д.

2.1. Методические приемы решения заданий № 15 и 16 КИМа ОГЭ

Типичные ошибки при решении таких заданий носят к сожалению не только вычислительный характер, но также связаны с непониманием условия задачи. Например, в тексте задачи имеется избыточное условие, и некоторые участники экзамена стараются его использовать. Встречаются ошибки из-за незнания соотношения между вписанным и центральным углами, опирающихся на одну дугу окружности; многие школьники писали приближенный ответ, используя только рисунок, причем вместо полуцелого значения брали ближайшее целое по правилу округления.

С целью минимизировать такие результаты рассмотрим типовые приемы решения задач, взятых из материалов подготовленных экспертами ФИПИ.

Пример 1.1. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 28, сторона BC равна 19, сторона AC равна 34. Найдите MN [рис. 1].

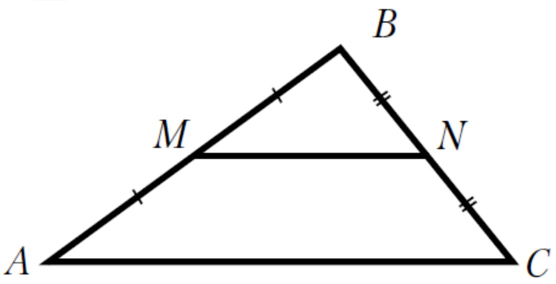

Рис. 1. Чертеж к примеру 1.1

Решение. Очень часто в условиях задания 15 содержится излишняя информация, которая не нужна для вычисления искомой величины. Искомая величина MN является средней линией треугольника и равна половине длины AC.

Ответ: 17.

Пример 1.2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, M – середина стороны AB, AB=64, BC=44. Найдите CM [рис. 2].

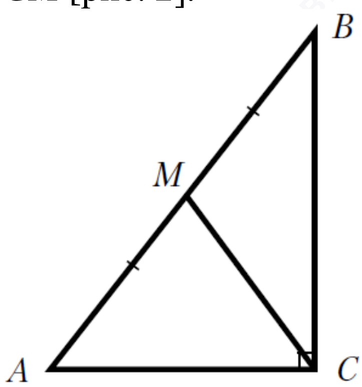

Рис. 2. Чертеж к примеру 1.2

Решение. В условиях задачи опять содержится излишняя информация.

Точка M является центром описанной окружности, отрезок AB – ее диаметр, CM – радиус.

Ответ: 8.

Пример 1.3. Точка *O* – центр окружности, на которой лежат точки *A*, *B* и *C*. Известно, что $\angle ABC=75°$ и $\angle OAB=43°$. Найдите угол *BCO*. Ответ дайте в градусах [рис. 3].

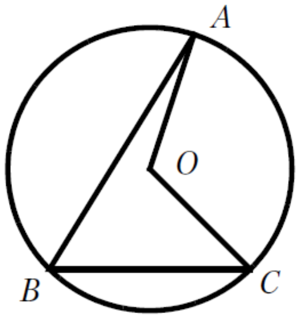

Рис. 3. Чертеж к примеру 1.3

Решение. Проводим дополнительное построение [рис. 4]. Треугольник *OAB* равнобедренный (*OA*, *OB* – радиусы), тогда $\angle OAB=\angle OBA=43°$. $\angle OBC=\angle ABC-\angle OBA=32°$. Треугольник *OBC* тоже равнобедренный. Значит, $\angle BCO=\angle OBC= 32°$.

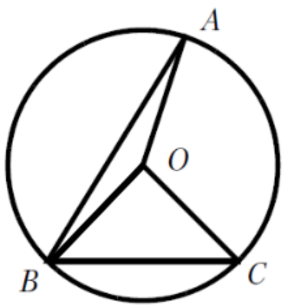

Рис. 4. Чертеж с дополнительным построением к примеру 1.3

Ответ: 32. (В ответе символ градусов не указывается!).

Пример 1.4. Хорды *AC* и *BD* окружности пересекаются в точке *P*, $BP= 10$, $CP= 8$, $DP =12$. Найдите *AP* [рис. 5].

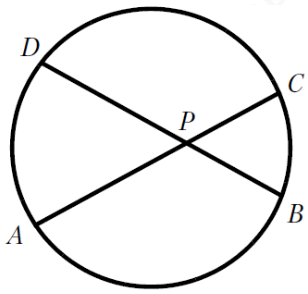

Рис. 5. Чертеж к примеру 1.4

Решение. По свойству пересекающихся хорд $AP\cdot CP = DP\cdot BP$. Из условия задачи $AP\cdot 8=12\cdot 10$, откуда $AP=15$.

Ответ: 15.

Пример 1.5. На окружности отмечены точки *A* и *B* так, что меньшая дуга *AB* равна 72°. Прямая *BC* касается окружности в токе *B* так, что угол *ABC* острый. Найдите угол *ABC*. Ответ дайте в градусах [рис. 6].

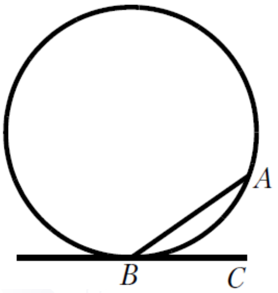

Рис. 6. Чертеж к примеру 1.5

Данную задачу решим двумя способами.

Решение 1. Проведем радиусы *OA* и *OB* [рис. 7]. Угловая величина дуги измеряется величиной центрального угла *AOB,* на который она опирается. Прямая *BC* касается окружности, поэтому $\angle OBC$=90°. Треугольник *AOB* равнобедренный, тогда $\angle OBA=\angle OAB$=(180°–72°):2=54°. Откуда $\angle ABC$==$\angle OBC$–$\angle$ *OBA*=90°–54°=36°.

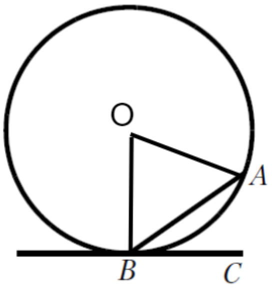

Рис. 7. Чертеж к решению 1 примера 1.5

Решение 2. Задачу можно решить значительно проще, если рассмотреть произвольный вписанный в эту окружность треугольник *BDA* [рис. 8], в котором угол *BDA* опирается на малую дугу *AB*. $\angle$ *BDA*=36° (половина угловой величины дуги *AB*). Треугольник *BDA* вписанный и прямая *BC* касается окружности в вершине *B.* По теореме о прямой, касающейся окружности в вершине вписанного треугольника, получим $\angle$ *BDA*=$\angle$ *ABC*=36°.

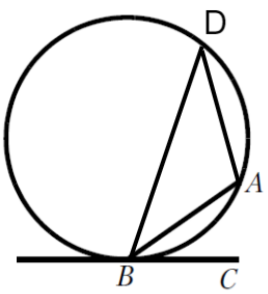

Рис. 8. Чертеж к решению 2 примера 1.5

Ответ: 36. (В ответе символ градусов не указывается!)

Задания для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC угол C равен 115°. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах [рис. 9].

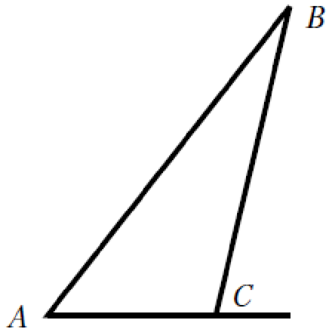

Рис. 9. Чертеж к задаче 1

2. В треугольнике два угла равны 54° и 58°. Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.
3. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 43°. Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.
4. На окружности по разные стороны от диаметра AB взяты точки M и N. Известно, что $\angle NBA$=36°. Найдите угол $\angle NMB$. Ответ дайте в градусах [рис. 10].

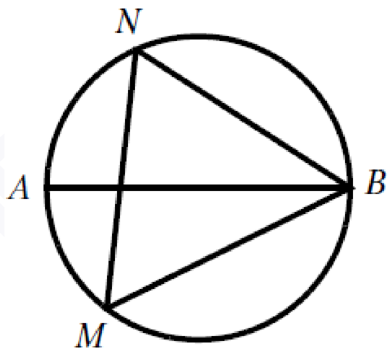

Рис. 10. Чертеж к задаче 4

5. Касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом 52°. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах [рис. 11].

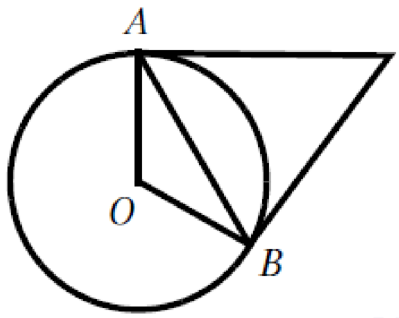

Рис. 11. Чертеж к задаче 5

6. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 8. Найдите высоту этого треугольника.

Ответы:

1) 65. 2) 62. 3) 47. 4) 54.
5) 26. 6) 12.

2.2. Методика решения задания № 17 из КИМов ОГЭ

В задании № 17, как правило, рассматриваются четырехугольники; решение задач, связанных с ними в основном опирается на их свойства или признаки.

Основные ошибки, допускаемые при выполнении данного задания связаны с непониманием условия задачи, незнанием свойств многоугольников и неумением применить формулы из справочника КИМов.

При решении геометрических задач необходимо развивать у обучающихся навыки смыслового чтения, умение рассуждать [4]. При изучении темы «Многоугольники. Четырехугольники» обязательно стоит отрабатывать умения применять свойства многоугольников для нахождения значений неизвестных геометрических величин, особенно при повторении материала во второй половине обучения в 9-м классе.

Рассмотрим несколько примеров по решению заданий на четырехугольники.

Пример 2.1. Найдите острый угол параллелограмма *ABCD*, если биссектриса угла *A* образует со стороной *BC* угол, равный 40°. Ответ дайте в градусах [рис. 12].

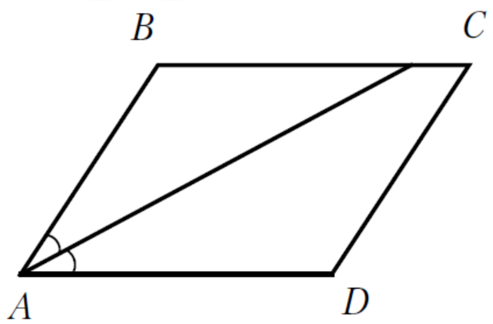

Рис. 12. Чертеж к примеру 2.1

Решение. Пусть биссектриса угла *A* пересекает сторону *BC* в точке *E*. По свойству биссектрисы угла параллелограмма треугольник *ABE* равнобедренный. Величины углов *AEB* и *BAE* равны. Но равны также углы *BAE* и *DAE*. Следовательно, угол *BAD* равен 80°.

Ответ: 80. (В ответе символ градусов не указывается!).

Пример 2.2. Периметр ромба равен 20, а один из углов равен 30°. Найдите площадь этого ромба.

Решение. Сторона ромба равна 20:5=4. По формуле площади параллелограмма (есть в справочных материалах) вычисляем искомую площадь $S = 4^2 \cdot sin30° = 8$.

Ответ: 8.

Пример 2.3. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 6.

Решение. Площадь ромба вычисляем как половину произведения длин диагоналей (формула есть в справочных материалах), поэтому $S = \frac{1}{2} 4 \cdot 6 = 12$.

Ответ: 12.

Задания для самостоятельного решения

1. Сторона квадрата равна $11\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.
2. Сумма двух углов равнобедренной трапеции равна 50°. Найдите больший угол этой трапеции. Ответ дайте в градусах.
3. Диагональ прямоугольника образует угол 44° с одной из его сторон. Найдите острый угол между диагоналями этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

Ответы:

1) 22. 2) 155. 3) 88.

2.3. Методические аспекты решения задания № 18 КИМа ОГЭ

Так называемое «задание на клеточках», при его выполнении достаточно справочных материалов. Встречаются задания на вычисление площадей треугольников, трапеций, параллелограммов и других простейших фигур. В некоторых случаях нужно определить длины высот и оснований и вычислить площадь по известной формуле, в некоторых – вычислить площадь по количеству занимаемых клеток. Есть задачи на вычисление средней линии, расстояния от точки до прямой и значений тригонометрических функций острых углов в прямоугольных треугольниках.

Основные ошибки при выполнении задания связаны с отсутствием должного внимания к процессу подсчета по клеткам, работая с рисунком ученики ошибаются в вычислении длин отрезков. Также встречались ошибки, связанные с неумением применить формулу из справочных материалов КИМа.

Следует на уроках учебного курса «Геометрия» отрабатывать приемы построения фигур на клетчатой бумаге с обязательным подсчетом длин, чтобы подобных ошибок не возникало. Ниже приведены примеры заданий, которые встречаются на ОГЭ по математике.

Пример 3.1. На клетчатой бумаге размером 1×1 изображена трапеция. Найдите ее площадь [рис. 13].

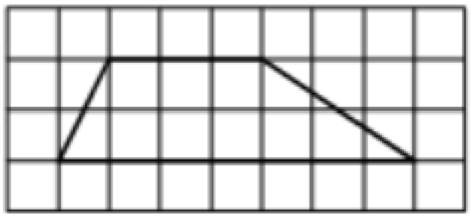

Рис. 13. Чертеж к примеру 3.1

Решение. Из рисунка видно, что основания трапеции равны 3 и 7, а высота 2. В справочных материалах имеется необходимая для вычисления формула площади трапеции, поэтому

$$S = \frac{3+7}{2} \cdot 2 = 10.$$

Ответ: 10.

Пример 3.2. На клетчатой бумаге размером 1×1 изображена трапеция. Найдите длину ее средней линии [рис. 13].

Решение. Из рисунка видно, что основания трапеции равны 3 и 7. В справочных материалах имеется необходимая для вычисления формула, тогда

$$L = \frac{3+7}{2} = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 3.3. На клетчатой бумаге размером 1×1 изображен прямоугольный треугольник. Найдите длину его большего катета [рис. 14].

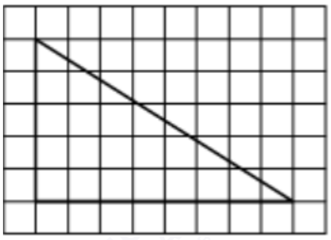

Рис. 14. Чертеж к примеру 3.3

Решение. Из рисунка видно, что искомая величина равна 8.
Ответ: 8.

Пример 3.4. На клетчатой бумаге размером 1×1 изображен прямоугольный треугольник. Найдите косинус его меньшего угла [рис. 15].

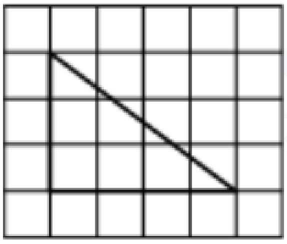

Рис. 15. Чертеж к примеру 3.4

Решение. Меньший угол в треугольнике всегда лежит против меньшей стороны. В нашем случае катеты треугольника равны 3 и 4. По теореме Пифагора находим длину гипотенузы

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2}=5.$$

Меньшим в нашем случае является угол, противолежащий катету длиной 3. Косинус этого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.

$$4:5=0,8.$$

Ответ: 0,8.

Задания для самостоятельного решения

1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены три точки: *A*, *B* и *C*. Найдите расстояние от точки *A* до середины отрезка *BC* [рис. 16].

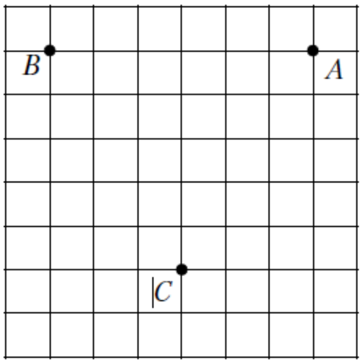

Рис. 16. Чертеж к задаче 1

2. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена фигура. Найдите ее площадь [рис. 17].

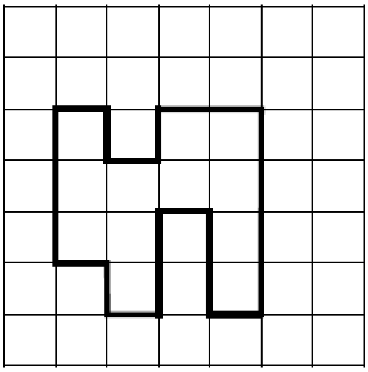

Рис. 17. Чертеж к задаче 2

3. Найдите тангенс угла *AOB*, изображенного на рисунке [рис. 18].

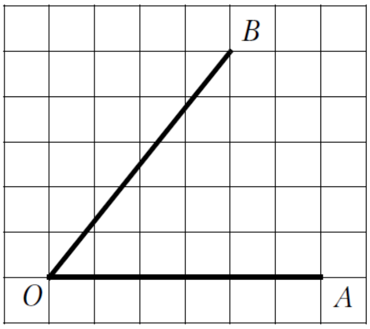

Рис. 18. Чертеж к задаче 3

Ответы:

1) 5. 2) 12. 3) 1,25.

2.4. Методика решения задания № 19 из КИМов ОГЭ

Одно из наиболее простых, по мнению авторов, задание. Правильным ответом в задании служит номер (номера) верных утверждений, что не требует никаких вычислений.

Основная проблема у участников была связана с неверной интерпретацией вопроса, когда фигурировал только один правильный вариант ответа, в бланк вносили два номера или наоборот, из двух верных вариантов вписан был только один из них. Учитывая вышесказанное, обращаем внимание на отработку умения анализировать текст задания, рассуждать, корректно выделять основной вопрос задания и правильно интерпретировать ответ к нему [4].

Рассмотрим несколько примеров такого типа заданий.

Пример 4.1. Какое из следующих утверждений верно?

1. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, перпендикулярную этой прямой.
2. Сумма углов любого треугольника равна 360 градусам.
3. Диагонали ромба равны. В ответ запишите номер верного утверждения.

Решение. Очевидно, что в этом задании предполагается наличие только одного ответа. Даже если поставить ответ наугад-вероятность угадать одна треть. Легко показать на рисунке, что из любой точки на плоскости можно провести перпендикуляр к заданной прямой. При этом, понимая, что верный ответ только один, можно не задумываться над истинность высказываний № 2 и № 3. С другой стороны, легко показать, что утверждения № 2 и № 3 ложны.

Ответ: 1.

Пример 4.2. Какое из следующих утверждений верно?

1. Диагонали равнобедренной трапеции равны.
2. Если три угла одного треугольника равны соответственно трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
3. Тангенс любого острого угла меньше единицы.

В ответ запишите номер верного утверждения.

Решение. Истинность первого утверждения (если экзаменуемый этого не знает) легко проверить с помощью чертежа равнобедренной трапеции. И этого будет достаточно. Очевидно, что второе утверждение – это один из признаков подобия, а не равенства треугольников. Ложность утверждения № 3 легко подтверждается значениями тангенсов 45 и 60 градусов из таблицы в прилагаемых справочных материалах. Однако, ложность утверждений № 2 и № 3 можно не проверять, если доказано, что первое утверждение верно.

Ответ: 1.

Пример 4.3. Какое из следующих утверждений верно?

1. Если диагонали выпуклого четырехугольника равны и перпендикулярны, то этот четырехугольник является квадратом.
2. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90 градусам.
3. Смежные углы всегда равны.

В ответ запишите номер верного утверждения.

Решение. Задание очень простое, если вычислить сумму острых углов прямоугольного треугольника. Однако, легко показать ложность первого и третьего утверждений. Действительно, легко нарисовать два пересекающихся под прямым углом отрезка равной длины, которые не делят друг друга точкой пересечения пополам. Эти отрезки являются диагоналями четырехугольника, отличного от квадрата. Очевидно также, что утверждение № 3 будет ложным.

Ответ: 2.

Пример 4.4. Какие из следующих утверждений верны?

1. Площадь ромба равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.
2. Боковые стороны любой трапеции равны.
3. Один из углов треугольника всегда не превышает 60 градусов.

В ответ запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Решение. Формулировка в задании допускает наличие нескольких правильных утверждений. В справочных материалах есть формула для вычисления площади параллелограмма в виде произведения стороны на высоту. Следует понять, что ромб – это частный случай параллелограмма. Поэтому, первое утверждение верно. Очевидно, что второе утверждение ложно. Достаточно посмотреть на чертеж трапеции в справочных материалах. Наиболее сложно, особенно для учеников слабо подготовленных, обосновать правильность утверждения № 3.

Ответ: 13 или 31.

Задания для самостоятельного решения

1. Какие из следующих утверждений верны?

А. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

Б. Все углы ромба равны.

В. Площадь квадрата равна произведению двух его смежных сторон.

В ответ запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

2. Какое из следующих утверждений верно?

А. Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению гипотенузы к прилежащему к этому углу катету.

Б. Основания любой трапеции параллельны.

В. Всегда один из двух смежных углов острый, а другой тупой.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

3. Какие из следующих утверждений верны?

А. Через заданную точку плоскости можно провести только одну прямую.

Б. Любые два равносторонних треугольника подобны.

В. Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой.

В ответ запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответы:

1) 13. 2) 2. 3) 23.

Заключение

Основной государственный экзамен по математике (ОГЭ) – серьезное испытание в жизни каждого выпускника основной школы. Результаты экзамена зависят и от педагога, и от обучающихся, и от родителей. Конечно, если школьник на протяжении девяти лет усердно занимался по математике или хотя бы имел «твердую» тройку, опасность, что он не сдаст ОГЭ, значительна мала.

Кроме того, есть еще один нюанс, что обучающийся может хорошо решать задачи, относящиеся к курсу «Алгебра», но при этом не решать задачи из курса «Геометрия» и тогда имеется большая вероятность, что он не сдаст экзамен, так как не наберет необходимое количество баллов по геометрии. Причем практика прошедшего ОГЭ по математике в 2024 года, как раз показала, что достаточно большое количество выпускников получили неудовлетворительную отметку из-за геометрии, при этом ими было набрано от 8 до 13 первичных баллов по экзаменационной работе (количество таких учащихся оказалось 1 132).

Для успешной сдачи обучающимися экзамена необходима правильная система подготовки. Учителю необходимо:

– научить понимать задачу: анализировать условие, рассуждать и находить рациональные способы решения необходимо в 5–6-х классах, пока уровень сложности их невелик, а сама задача является одной из самых важных категорий [4];
– формировать у обучающихся способность составлять математическую модель и проводить анализ всех возможных способов решения;
– формировать у обучающихся потребность соотносить найденное решение с вопросом задачи, уметь проверять ответ на правдоподобие, то есть после получения результата при решении задачи провести его анализ на соответствии реальности, будто это задание из раздела «последовательности» (например, количество мест в таком-то ряду) или раздела «формулы» (например, радиус окружности при движении объекта по кругу с ускорением) и т. п.;
– систематически развивать вычислительные навыки, особо уделить внимание выполнению простейших (и не очень) вычислений устно, по возможности отработать навыки простейших преобразований;
– формировать умения записывать математические рассуждения, обращая при этом внимание на их точность и полноту.

В качестве обоснования последнего утверждения приведем пример из экзамена 2023 года, когда около сотни школьников в задании № 9 в одном из вариантов ОГЭ получили ответ 3 в условии:

«Найдите решение уравнения $10\cdot(x\text{-}9) = 7$».

При разговоре по итогам экзамена выяснилась, что данные учащиеся рассуждали так:

1-е действие: $x - 9 = 7 - 10$, то есть вместо действия деления на 10 идет вычитание;

2-е действие: $x - 9 = -3$, откуда $x = -9 : -3$, то есть вместо переноса слагаемого из одной части уравнения в другую проведена операция деления.

Данный пример показывает отсутствие у участников экзамена понимания разницы между арифметическими операциями при формальном выполнении практически устных вычислений.

Представленное уравнение при сформированных базовых умениях решается достаточно просто:

1-е действие: разделить обе части на 10;

2-е действие: перенести число 9 в правую часть, изменив знак;

3-е действие: выполнить операцию сложения и получить верный ответ 9,7.

Рекомендуем педагогам отрабатывать на уроках некоторые приемы быстрого счета, например, такие, как возведение в квадрат чисел, оканчивающихся на 5; умножение и деление на 5, 25; умножение на 11; нахождение произведений двузначных чисел, у которых одинаковое число десятков, а сумма единиц составляет 10; и других, которые становятся инструментом («таблицей умножения») для более сложных заданий.

Кроме того, при повторении материала организовывать работу с кейсами, карточками в малых группах (по 3-4 школьника), так как известно, что ученики лучше усваивают тот материал, что обсуждают при взаимодействии, и лучше помнят то, что объясняют друг другу. Для кейсов, карточек, можно использовать «задания для самостоятельного решения» данных методических рекомендаций. При возникновении ошибок анализируют причину и решают подобные задания на отработку навыка.

Для заданий курса «Геометрия» желательно сначала подготовить справочники по темам «треугольники», «четырехугольники», «окружности», а затем выполнить задачи разного типа сложности в соответствии с Открытым банком заданий ОГЭ по математике. В каждой из представленных тем геометрии важно рассмотреть задачи, при решении которых возникают вопросы:

1) для темы «треугольники» – признаки равенства треугольников, неравенство треугольника, определение вида треугольника, теоремы синусов и косинусов, формулы площади треугольников, признаки подобия треугольников, четыре замечательные точки треугольника, вписанные и описанные треугольники;
2) для темы «четырехугольники» – параллелограмм и его свойства, трапеция и ее свойства, прямоугольник его свойства и признаки, ромб, его свойства и признаки, квадрат, его свойства и признаки, вписанные и описанные четырехугольники и формулы их площади;
3) для темы «окружности» – прямые, отрезки и углы, связанные с окружностью, свойства вписанных и центральных углов, углы между хордами, касательными и секущими, свойства хорд, соотношения между длинами хорд, отрезков касательных и секущих, свойства дуг и хорд, площадь круга и его частей.

Авторы данных рекомендаций надеются, что предложенный в ней материал поможет учителям математики при организации повторения школьниками некоторых типов задач, соответствующих уровню заданий экзаменационной работы первой части КИМов ОГЭ, а также в целом будет полезен при освоении разделов программы по Математике в соответствии с ФГОС ООО [5].

Список литературы

1. Альперин М. И. Не «два» на ОГЭ. Метод. рекомендации, 2-е изд. / М. И. Альперин, О. А. Белослудцев, С. Э. Нохрин – Екатеринбург: ГАОУ ДПО СО «ИРО», 2018. – 92 с. – Текст: непосредственный.
2. Белослудцев О. А. Методика обучению решению практико-ориентированных задач. Метод. рекомендации. / О. А. Белослудцев, В. Б. Соловьянов – Екатеринбург: ГАОУ ДПО СО «ИРО», 2022. – 20 с. – Текст: непосредственный.
3. Белослудцев О. А. Методика обучению решению задач по теории вероятностей. Метод. рекомендации. / О. А. Белослудцев, В. Б. Соловьянов, Л. Е. Шмакова – Екатеринбург: ГАОУ ДПО СО «ИРО», 2023. – 32 с. – Текст: непосредственный.
4. Шмакова Л. Е. Функциональная грамотность. Работа с текстовыми задачами на уроках математики. Метод. рекомендации. Л. Е. Шмакова, В. Б. Соловьянов – Екатеринбург: ГАОУ ДПО СО «ИРО», 2023. – 46 с. – Текст: непосредственный.
5. Федеральная рабочая программа (базовый уровень) (для 5–9 классов образовательных организаций) URL: https://edsoo.ru/rabochie-programmy/ (дата обращения: 11.11.2024).