

Шмакова Л. Е., Овчинникова Т. Д.

**Формирование математической грамотности  
в процессе обучения теории вероятностей  
и математической статистики**

*Методические рекомендации*



**ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ  
ОБРАЗОВАНИЯ**  
Свердловской области

Министерство образования и молодежной политики Свердловской области  
Государственное автономное образовательное учреждение  
дополнительного профессионального образования  
Свердловской области  
«Институт развития образования»  
Кафедра математики и информатики

Шмакова Л. Е., Овчинникова Т. Д.

**Формирование математической грамотности  
в процессе обучения теории вероятностей  
и математической статистики**

*Методические рекомендации*

Екатеринбург  
2024

**ББК 74.262.21**

**Ф 79**

Рецензенты:

Е. В. Бородич, учитель математики МАОУ Гимназия № 18, г. Н. Тагил;

Ю. А. Куликов, доцент кафедры управленческих и педагогических технологий

Нижнетагильского филиала ГАОУ ДПО СО «ИРО», кандидат физико-математических наук.

Авторы-составители:

Л. Е. Шмакова, заведующий кафедрой математики и информатики ГАОУ ДПО СО «ИРО», кандидат педагогических наук, доцент;

Т. Д. Овчинникова, преподаватель кафедры математики и информатики ГАОУ ДПО СО «ИРО».

**Ф 79    Формирование математической грамотности в процессе обучения теории вероятностей и математической статистики: методические рекомендации /** Министерство образования и молодежной политики Свердловской области, Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования Свердловской области «Институт развития образования»; авт.-сост. Л. Е. Шмакова, Т. Д. Овчинникова. – Екатеринбург: ГАОУ ДПО СО «ИРО», 2024. – 36 с.

Настоящие рекомендации посвящены вопросам формирования математической грамотности школьников в учебном курсе «Вероятность и статистика».

В рекомендациях анализируются особенности курса и вытекающие из них возможности, которые учитель может использовать для формирования математической грамотности обучающихся.

Рассматриваются области применения знаний вероятности и статистики на примерах решения простых задач и задач углубленного уровня.

Методические рекомендации предназначены для учителей математики общеобразовательных организаций и методистов, курирующих предмет «Математика».

Утверждено Научно-методическим советом ГАОУ ДПО СО «ИРО» от 24.06.2024 № 7

**ББК 74.262.21**

**© ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования», 2024**

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Особенности учебного курса «Вероятность и статистика» для формирования математической грамотности у школьников .....</b>	<b>6</b>
<b>Глава 2. Области применения знаний вероятности и статистики в жизни .....</b>	<b>16</b>
Теория вероятности в экономике, финансовой аналитике, маркетинге .....	17
Теория вероятности в технике и промышленности .....	20
Спорт и теория вероятности .....	24
Прогнозирование погоды .....	25
Теория вероятности в образовании, в биологических и медицинских исследованиях .....	28
<b>Заключение.....</b>	<b>30</b>
<b>Библиографический список.....</b>	<b>31</b>
<b>Интернет-ресурсы.....</b>	<b>33</b>

## Введение

В обычной жизни и профессиональной сфере каждый человек постоянно принимает решения на основе имеющихся у него данных. А для обоснованного принятия решения в условиях недостатка или избытка информации необходимо, в том числе, хорошо сформированное вероятностное и статистическое мышление. В современном мире вероятность вышла за рамки теории азартных игр и применяется в разных областях деятельности человека: прогнозировании, статистическом анализе, метеорологии, бизнесе, медицине и других сферах. Мы наблюдаем рост числа профессий, в которых важна базовая подготовка в области вероятности и статистики. Вероятность и статистика приобретают все большую значимость, как с точки зрения практического применения, так и их роли в образовании, необходимом каждому человеку [3].

В условиях модернизации образования в России в содержание среднего образования внесены существенные изменения, в частности, в программу по математике основной школы включены теория вероятностей и элементы статистики. Это признание обществом необходимости формирования современного мировоззрения, для которого одинаково важны представления и о жестких связях, и о случайном. Без знания понятий и методов теории вероятностей и статистики невозможна организация эффективного конкурентоспособного производства, внедрение новых лекарств и методов лечения в медицине, обеспечение страховой защиты граждан от непредвиденных обстоятельств, проведение обоснованной социальной политики.

31.05.2021 Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 287 утвержден Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (далее – ФГОС ОО). В обновленном стандарте на уровне основного общего образования в учебный предмет «Математика» включен отдельный учебный курс «Вероятность и статистика» для учащихся 7–9-х классов, содержание которого ранее частично было представлено в курсе алгебры. В соответствии со статьей 145.7.1.4. ФГОС ООО общее число часов, рекомендованных для изучения курса «Вероятность и статистика», – 102 часа: в 7-м классе – 34 часа (1 час в неделю), в 8-м классе – 34 часа (1 час в неделю), в 9-м классе – 34 часа (1 час в неделю).

В школу теорию вероятностей как отдельный курс вводили постепенно. Теория вероятностей и статистика вошла в ФГОС в 2004 году, в 2010 году задача по теории вероятностей была включена в контрольные и измерительные материалы государственной итоговой аттестации (далее – ГИА) по математике для 9-х классов, в 2012 году – в Единый государственный экзамен по математике для 11-х классов, в 2013 году вероятность и статистика указаны как важная составляющая в Концепции развития математического образования.

Новый курс имеет прикладной характер и позволяет обучающимся получить не только фундаментальные знания в области математики, но и развить навыки анализа данных, логического мышления и принятия решений на основе вероятностных расчетов. В ФГОС ОО подчеркивается практическая направленность курса. Чтобы обучающиеся видели применение вероятности и статистики

в реальной жизни на занятиях учителю важно использовать метод проектов, экспериментирование, моделирование, кейс-технологии, игры.

Настоящие рекомендации имеют практико-ориентированную направленность. Методические рекомендации состоят из двух глав, в каждой из которых даются методические рекомендации учителю, и решаются задачи.

В первой главе анализируются особенности учебного курса «Вероятность и статистика», рассматривается, какие, с учетом выделенных особенностей, открываются возможности для формирования математической грамотности. Даются рекомендации педагогам по использованию данных особенностей для формирования математической грамотности.

Во второй главе рассматриваются области применения знаний учебного курса «Вероятность и статистика» в жизни. Разбираются задачи из разных областей. Акцент делается на том, что в процессе организации образовательной деятельности на уроках важно, чтобы школьники не просто решали задачи, а учились анализировать данные, выделять закономерности, рассуждать, экспериментировать, обосновывать, делать выводы.

Надеемся, что методические рекомендации окажут педагогам реальную помощь в формировании математической грамотности на занятиях по «Вероятности и статистике».

## **Глава 1. Особенности учебного курса «Вероятность и статистика» для формирования математической грамотности у школьников**

Теория вероятностей – интересный, молодой и развивающийся раздел математики. В школьной математике большая часть вопросов и заданий предполагает четкие однозначные ответы и доказательства. В вероятности классические задачи на нахождение, определение неизвестного, подсчет значений также присутствуют. Но развитие статистического и вероятностного мышления в первую очередь подразумевает умение анализировать данные, формулировать гипотезы и принимать разумные решения на этой основе.

Приведем определение понятия «Математическая грамотность». «Математическая грамотность – это способность индивидуума формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах. Она включает математические рассуждения, использование математических понятий, процедур, фактов и инструментов для описания, объяснения и предсказания явлений. Она помогает людям понять роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения...» [4].

Любая математическая теория формализует привычные наглядные или мыслимые образы. Нет образов – нет теории. Поэтому одной из главных задач учебного курса «Вероятность и статистика» должно быть формирование общих представлений о случайной изменчивости, о случайности, вероятности, об их месте в окружающем мире, а не закрепление навыков манипулирования с числами, формулами и понятиями. Если у школьника не создать первичные наглядные представления о случайности и изменчивости, то невозможно в дальнейшем их формализовать в ходе изучения теории вероятностей – она останется в памяти как набор непонятных, ни о чем не говорящих символов [8].

Проанализируем особенности курса «Вероятность и статистика» и рассмотрим, какие, с учетом выделенных особенностей, открываются возможности для формирования математической грамотности.

В курсе «Вероятность и статистика» выделены следующие содержательно-методические линии:

- «Представление данных и описательная статистика»;
- «Вероятность»;
- «Элементы комбинаторики»;
- «Введение в теорию графов».

Содержание линии «Представление данных и описательная статистика» служит основой для формирования навыков работы с информацией: от чтения и интерпретации информации, представленной в таблицах, на диаграммах и графиках до сбора, представления и анализа данных с использованием статистических характеристик средних и рассеивания. Работая с данными, обучающиеся учатся считать и интерпретировать данные, выдвигать, аргументировать и критиковать простейшие гипотезы, размышлять над факторами, вызывающими изменчивость, и оценивать их влияние на рассматриваемые величины и процессы.

Интуитивное представление о случайной изменчивости, исследование закономерностей и тенденций становится мотивирующей основой для изучения теории вероятностей. Большое значение здесь имеют практические задания, в частности опыты с классическими вероятностными моделями.

Понятие вероятности вводится как мера правдоподобия случайного события. При изучении курса обучающиеся знакомятся с простейшими методами вычисления вероятностей в случайных экспериментах с равновероятными элементарными исходами, вероятностными законами, позволяющими ставить и решать более сложные задачи. В курс входят начальные представления о случайных величинах и их числовых характеристиках.

Также в рамках этого курса осуществляется знакомство обучающихся с множествами и основными операциями над множествами, рассматриваются примеры применения их для решения задач, а также использования в других математических курсах и учебных предметах [8].

### **Основные особенности школьного курса «Вероятность и статистика»**

1. *Первичность статистики.* Обучающимся предлагается научиться анализировать статистические данные, выделять особенности, наблюдать над случайной изменчивостью и закономерностями. Задача педагога помочь осознать ученикам значимость данных в современном мире и сформировать умения «чувствовать данные» при принятии решения.
2. *Некомбинаторный подход.* В школьном курсе «Вероятность и статистика» к вероятности подходят как к мере правдоподобия событий. Задача педагога – организовать деятельность обучающихся с использованием экспериментирования и наблюдения. Дать возможность обучающимся проводя эксперименты осознать понятие вероятности;
3. *Практическая направленность учебного курса.* Задача педагога – организовать деятельность обучающихся, в процессе которой они будут учиться структурировать, представлять, анализировать, интерпретировать и использовать данные для прогнозирования, принятия решений. Получают представление о роли маловероятных событий в природе и обществе. О законе больших чисел, как фундаментальном законе природы, имеющем математическое выражение;
4. *Использование современных информационных технологий.* Задача педагога – познакомить обучающихся с компьютерными программами, онлайн-сервисами и ресурсами, которые помогают анализировать и исследовать большие массивы данных, строить диаграммы, проводить вероятностное моделирование.

Итак, начинается учебный курс «Вероятность и статистика» с представления о случайной изменчивости. В федеральной рабочей программе на тему «Представление данных» выделено 7 часов на базовом и 4 часа на углубленном уровнях, на тему «Описательная статистика» по 8 часов соответственно. Материал описательной статистики, с которым знакомятся ученики 7-го класса, представлен таблицами и диаграммами, обучающиеся готовы к его пониманию.

Говоря о взаимосвязи статистики и теории вероятностей, следует отметить, что статистика дает методы численного описания массовых явлений, а теория вероятностей предоставляет для этого теоретическую основу. Только вдумавшись в природу случайности и научившись описывать простейшие случайные явления минимальным набором числовых средств, обучающиеся с помощью учителя смогут ставить перед собой вопрос о теоретических инструментах изучения случайности [5].

В учебнике «Вероятность и статистика» под редакцией И. В. Яценко, и в цифровом образовательном ресурсе «Вероятность и статистика» каталога цифрового образовательного контента ФГИС «Моя школа» подчеркивается, что мы живем в мире, наполненном числовыми данными. И в современном мире для человека важно умение ориентироваться в этих данных, использовать их разумным образом.

Характеризуя современный мир ученые используют такие характеристики, как изменчивость, нестабильность, неопределенность, сложность, неоднозначность. Для выявления закономерностей, быстрого реагирования на изменения, прогнозирования, принятия решения в сложной ситуации человеку необходимо уметь работать с информацией: анализировать, структурировать, интерпретировать, визуализировать данные.

В процессе освоения линии «Представление данных и описательная статистика» ученики знакомятся с представлением информации в сводных статистических отчетах, учатся анализировать данные, представленные в таблицах, на диаграммах. Школьники сравнивают варианты представления данных и учатся ориентироваться в них.

При работе с данными, педагогу необходимо помочь обучающимся осознать, что важно не только собрать достоверную информацию, обработать ее, но и правильно структурировать и представить.

### **Рекомендации учителю**

*На протяжении всего процесса обучения важно давать обучающимся задания, направленные на сбор и анализ информации на уровне школы, муниципалитета, региона, Российской Федерации.*

Например, в качестве домашнего задания ученики готовят информацию:

- 1) об изменении численности населения области за последние 10 лет;
- 2) о количестве пользователей Интернета (предпочтения ресурсов);
- 3) об изменении количества обучающихся в школе за последние 10 лет;
- 4) о температуре в области, городе, муниципальном районе, селе.
- 5) о стоимости:
  - жесткого диска;
  - смартфона;
  - наушников и др.
  - билетов из Екатеринбурга в Москву;
  - о самом жарком или холодном месяце на Урале за последние 3–5 лет и др.

Но сбор информации – это только первый шаг. Далее необходимо научить анализировать данные и делать выводы.

Например, на занятии ученики зачитывают подготовленную информацию. Учитель организует обсуждение представленного материала: ученики анализируют информацию и пытаются сделать вывод (например, какой диск приобрести с учетом объема и цены, какой смартфон выбрать с учетом цены и функциональных возможностей, на основе метеорологических данных выбирают самый холодный или самый жаркий месяц и прогнозируют зимний или летний отдых и др.). Задача педагога подвести учеников к выводу, что с описательной информацией сложно работать и для принятия решения ее нужно систематизировать, структурировать и, возможно, дополнить необходимыми данными.

Таблица позволяет структурировать и упорядочивать данные, точно и полно их описывать. На уроке педагогу важно направлять обсуждение данных обучающимися. Составляя таблицу, ученики рассматривают и обсуждают варианты размещения данных, учатся структурировать и размещать данные с учетом их специфики и условия задачи. Учитель может дать задание ученикам поэкспериментировать с размещением данных в таблице и выбрать тот способ представления, который позволяет лучше проводить их анализ. Анализируя данные, представленные в таблицах обучающиеся пытаются выявить закономерности, прогнозировать, делать выводы и принимать обоснованные решения.

*Пример 1.* Учитель предложил обучающимся таблицу, в которой представлены данные сдачи ОГЭ учениками их школы за два предыдущих учебных года.

Год сдачи ОГЭ	Класс	Писали ОГЭ	Сдали	Не сдали
2021-2022	9 А	26	21	5
2021-2022	9 Б	21	18	3
2022-2023	9 А	26	22	3
2022-2023	9 Б	24	20	2
Всего		97	81	13

Необходимо определить вероятность сдачи экзамена по математике без двоек девятиклассниками текущего учебного года.

*Решение*

*Подобную таблицу можно рассмотреть с учениками в теме «Представление данных».* Дать задание, проанализировать данные таблицы и попробовать сделать выводы. Организуя обсуждение, педагог задает следующие вопросы:

- Можем ли мы сделать точный прогноз о количестве девятиклассников, не сдавших экзамен по математике в текущем учебном году?
- Какие факторы могут повлиять на увеличение или уменьшение количества девятиклассников, не сдавших экзамен по математике в текущем учебном году?

Если подобную задачу рассматривать по теме «Вероятность», то прежде чем переходить к решению задачи и выписыванию события, учителю также важно организовать обсуждение, например, используя следующие вопросы:

- Насколько вероятна, найденная на основе данных сдачи ОГЭ за два предыдущих учебных года, будет достоверна?
- Какой период достаточен для того, чтобы можно было опираться на найденную вероятность?
- Какие показатели влияют на результаты ОГЭ? И другие.

Такого рода обсуждения показывают, что в учебных задачах часть информации опускается и задача формулируется в упрощенном варианте.

Итак, обозначим за событие  $A$  – сдача экзамена по математике без двоек девятиклассниками текущего учебного года.

$$P(A) = \frac{81}{97} = 0,835$$

*Ответ:* вероятность сдачи экзамена по математике без двоек девятиклассниками текущего учебного года составляет 0,835.

### **Рекомендации учителю**

*Важно, чтобы школьники, работая с готовыми статистическими таблицами, учились извлекать информацию, анализировать, интерпретировать ее, рассуждать, решать задания, делать прогнозы и выводы.*

Учителю, возможно, совместно с учениками необходимо подбирать как можно больше значимых для школьника сюжетов из жизни. Анализируя статистические данные, ученики учатся замечать, что те или иные события происходят чаще или реже относительно других.

*В школьном учебном курсе «Вероятность и статистика» важен практико-ориентированный подход с акцентом на понимании вероятностных ситуаций и описание изменчивости, а не на количественных отношениях между вероятностями.* Такой же подход в настоящее время характерен для составителей заданий по вероятности и статистике для ГИА и ЕГЭ.

При выполнении ВПР, заданий ГИА у части учеников возникают затруднения при извлечении данных из таблиц и диаграмм.

*Используя возможности данного курса, учителю важно организовать деятельность обучающихся по снятию затруднений на извлечение данных из таблиц и диаграмм.*

Педагог может сам разработать кейсы с таблицами и диаграммами, а может привлечь к этому учеников. Для этого необходимо четко сформулировать задание, совместно разработать критерии оценивания, разделить учеников на 5-6 малых групп. В процессе разработки кейсов, обучающиеся учатся собирать, анализировать и представлять информацию, формулировать задания на языке математики и на естественном языке, интерпретировать результаты в контексте ситуации.

1. В качестве домашнего задания, например, в течение двух недель ученики в малых группах готовят информационный кейс, содержащий таблицу с данными или диаграммы, задания к ней.
2. На уроке, используя прием «карусель», группы работают в два этапа: на первом – обмениваются кейсами и анализируют их на корректность

- и наличие ошибок, если необходимо, корректируют и получают дополнительный балл; на втором этапе – обмениваются кейсами и решают задания.
3. Анализируют затруднения, с которыми столкнулись, и вместе с педагогом решают, как снять эти затруднения.

*Организуя освоение тем линии «Представление данных и описательная статистика», учитель также имеет возможность повторить и закрепить ряд тем, пройденных в школьном курсе «Алгебра» (например, проценты).*

Таким образом, особенность «первичности статистики» предоставляет следующие возможности для формирования математической грамотности:

- развивать умение систематизировать и структурировать статистическую информацию;
- анализировать данные и выявлять закономерности;
- прогнозировать и высказывать суждения, подкрепляя их данными таблиц, диаграмм;
- принимать обоснованные решения.

На минимальном и базовом уровне важно вооружить школьника общими знаниями и представлениями, позволяющими ему ориентироваться в статистической информации, предоставляемой средствами массовой информации.

Важным элементом преподавания курса является использование **современных информационных технологий**. Электронные таблицы содержат мощный инструментарий для анализа больших массивов данных. Задача учителя помочь обучающимся научиться систематизировать и структурировать данные для размещения в электронных таблицах, чтобы оптимально использовать функциональные возможности программы.

### **Рекомендации учителю**

Например, перед выполнением задания 1 из урока № 8 по теме «Числовые наборы. Среднее арифметическое» (ФГИС «Моя школа» каталог цифрового образовательного контента) учитель предлагает в рамках домашнего задания построить таблицу оплаты ЖКХ (квартплата, электричество, вода) своей семьи за последние три года.

На уроке педагог организует обсуждение данных: как размещены данные, какие выводы и предположения можно сделать на основе представленных данных. Как будет выглядеть общая таблица, позволяющая сравнить оплату за ЖКХ, потребление электричества, воды и др. семьями учеников? Какие выводы можно сделать, анализируя данные сводной таблицы?

Используя для решения задач электронные таблицы, учителю важно подвести обучающихся к выводу, что чем больше данных, тем лучше прослеживаются закономерности, выводы становятся более обоснованными. Ранее компьютеры были слабее, и у них не хватало мощности обрабатывать большие массивы данных, сейчас это стало возможным.

Также хорошо провести параллель с предметом «Информатика» или спланировать проведение интегрированных уроков. Выстраивание межпредметных

связей способствует систематизации, а, следовательно, прочности и глубине знаний, помогает дать обучающимся целостную картину мира.

Используя электронные таблицы для решения задач с реальными статистическими данными, обучающиеся начинают понимать смысл накопления данных.

Работая с числовыми характеристиками (на базовом уровне: среднее арифметическое, медиана, размах, наибольшее и наименьшее значения, дисперсия; дополнительно на углубленном уровне: квартили, среднее гармоническое), ученики получают представление о том, что числовых характеристик много и способ описания данных в каждой задаче выбирается с учетом цели исследования, природы данных и сложившихся традиций.

### **Рекомендации учителю**

*При работе с данными характеристиками важно, чтобы обучающиеся не только знали, как вычисляется та или иная характеристика, но понимали, какую из характеристик предпочтительнее использовать.*

И здесь также необходимы примеры из жизни, учитывающие особенности характеристик. На примерах обучающиеся лучше понимают достоинства и недостатки характеристик и осознают, что выбор характеристики зависит от условия конкретной задачи. Например, при строительстве речных мостов учитывают многолетние наблюдения уровня паводка на реке. Сезонные наблюдения высоты подъема воды дают числовой набор. Если брать в качестве меры оценки этого набора СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ или другую центральную меру, то в какой-то год, когда вода поднимется выше этого среднего, мост смоеет. Поэтому при расчете моста опираются на НАИБОЛЬШУЮ наблюдаемую высоту подъема воды. Следовательно, в этом и некоторых других случаях НАИБОЛЬШЕЕ значение наилучшим образом характеризует весь набор.

Учеников можно также разделить на группы и дать задание подобрать пример для выбранной характеристики, когда она является наиболее подходящей, а когда она не работает.

### **Рекомендации учителю**

*При обсуждении на уроках реальных статистических данных хорошо иллюстрируется само понятие случайной изменчивости окружающего нас мира. Тем самым готовится концептуальная база для понятий «случайный эксперимент» и вероятности различных исходов этого эксперимента.*

Таким образом, на занятиях по «Вероятности и статистике» обучающиеся погружаются в статистический материал и приобщаются к общественной жизни посредством использования и анализа статистических данных [6].

Уроки с использованием электронных таблиц, онлайн-сервисов и ресурсов более интерактивны и поэтому более интересны современным школьникам. Навыки, полученные учениками на таких уроках, будут полезны и для решения учебных задач и для задач из «жизни».

Рассмотрим далее возможности содержательно-методической линии «**Вероятность**». Введению понятия «вероятность» предшествует тема «Случайный опыт и случайное событие» (ФГИС «Моя школа» урок № 26). В рекомендациях учителю

написано, что следует его провести в форме дискуссии с классом. На данном уроке вводится основное понятие теории вероятностей – понятие случайного события. Будем называть событие случайным, если оно относится к случайному опыту (эксперименту), исход которого нельзя точно предсказать. Важно, чтобы обучающиеся усвоили, что теория вероятностей рассматривает *случайные события не сами по себе, а в рамках случайных экспериментов (случайных опытов)*.

### **Рекомендации учителю**

*Иногда в обыденной речи используют выражение: «вероятность события составляет столько-то процентов». В школьном курсе лучше избегать использование измерения вероятностей событий в процентах. Важно, чтобы обучающиеся усвоили, что вероятность события может быть любым числом между нулем и единицей:  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Понимание этого позволяет ученикам избегать ошибок при вычислении вероятностей.*

Практически любая задача на определение вероятности является текстовой. Поэтому необходимо, чтобы обучающиеся осознали значимость понимания условия задачи: в задачах по теории вероятностей смысловую нагрузку несет каждое слово!

### **Рекомендации учителю**

*При составлении математической модели задачи по теории вероятностей лучше придерживаться следующей схемы.*

1. Внимательно прочитать задачу и понять, что именно происходит (например, что и из какого ящика выбирается и т. п.). Задача ученика – *осмыслить условие задачи*.
2. Найти основной вопрос задачи вроде «вычислить вероятность того, что...» и это многоточие записать в виде *события*, вероятность которого надо найти. Задача ученика – *вести название случайного события*, которое необходимо для начала построения математической модели, *выписать все исходы и исходы, благоприятствующие наступлению события*.
3. Когда событие записано, требуется понять к какой «идее» теории вероятностей относится задача для выбора правильной формулы, особенно с использованием комбинаторики. Задача ученика – как бы «прочувствовать» формулу и ответить на вопрос – почему предложенный вариант выбора той или иной формулы (комбинаторики) можно использовать для решения задачи?
4. Если формулы выбраны правильно, подставить в формулу для вычисления  $P(A)$ , провести необходимые вычисления и записать ответ задачи. Задача ученика – провести вычисления и проанализировать полученный результат и вопрос задачи.

В данной схеме для решения задачи по теории вероятности, как и для любой текстовой задачи, кроме знания формул, важна способность к смысловому чтению и умение рассуждать [1].

Одним из основных является второй этап, на котором надо выписать *событие*, вероятность которого надо найти, *все исходы* и *исходы, благоприятствующие* наступлению события. Для успешности данного этапа важно, чтобы педагог организовывал обсуждение условия задачи, приучая учеников к изображению схем в процессе рассуждения, проведению эксперимента. Обучающиеся, рассуждая и экспериментируя, приходят к пониманию условия задачи.

### **Рекомендации учителю**

*Учителю необходимо перестроиться с преподавания абстрактных фактов на применение математики при обсуждении практических задач на уроках «Вероятности и статистики». Примером могут служить практико-ориентированные задачи, появившиеся в ЕГЭ, на расчет сдачи, выбор альтернативы, расчет времени поездки, которые оказались субъективно сложнее, чем преобразования логарифмических выражений.*

Поэтому на любом уроке по «Теории вероятностей и статистике» педагогу необходимо приучать обучающихся к рассуждениям, высказыванию обоснованных выводов.

При решении задач на определение вероятности часто приходится иметь дело с задачами, в которых необходимо подсчитывать число возможных способов совершения каких-либо действий. Задачи такого типа называются комбинаторными. Рассматривая линию «**Элементы комбинаторики**», важно, чтобы обучающиеся получили представление о вариативности, о различных вариантах и их числе, которые могут возникнуть во многих житейских ситуациях. Для осмысления хорошо проводить опыт и эксперимент, приводить примеры из жизни.

### **Рекомендации учителю**

1. Разбирая комбинаторные задачи учителю необходимо организовать обсуждение и перечисление всех вариантов из условия задачи. Например, ученики, решая задачу, выписывают и перечисляют все возможные варианты различных бутербродов из двух сортов батона и трех сортов сыра, или колбасы; различных наборов из двух напитков и четырех пирожных и т. д. Там, где удобно использовать дерево вариантов.
2. Разделить класс на группы и дать задание провести эксперимент, записывая все варианты наборов. Группы работают с блокнотами и фломастерами, ручками и карандашами, ручками и ластиками и так далее.
3. Задавать индивидуальное или групповое домашнее задание:
  - провести наблюдение и составить комбинаторные задачи;
  - на уроке провести викторину между группами.

После того как школьники осознали механизм, разумно сформулировать комбинаторное правило умножения.

Аналогичным образом подходить и к задачам на перестановки. На простых примерах ученики разбираются с механизмом перестановки: например, в задаче о перестановке трех элементов на первое место может претендовать любой из трех элементов, на второе – любой из двух оставшихся, а на последнее – только один, не выбранный ранее. Рассматривая и записывая возможные перестановки в задачах

с конкретными данными, педагог подводит обучающихся к обобщению, формульному описанию числа перестановок с помощью факториала числа  $n!$ .

Проводя опыты и эксперименты, живые наблюдения, обучающиеся учатся ориентироваться в общественных процессах, осознавать закономерности в массе случайных фактов, анализировать ситуации и принимать обоснованные решения.

Еще одной важной особенностью преподавания курса «Вероятность и статистика» является его связь жизнью.

В школьной математике очень не хватает практических задач, которые понятны и вызывают интерес у учеников. А вероятность дает такие задачи. Рассматривая на занятиях различные ситуации из реальной жизни, ученики осознают применение математики в различных областях науки, бизнеса и повседневной жизни [2].

В данной главе приведем лишь один классический пример из жизни.

На длинном узком шоссе, где обгон невозможен, автомобили волей-неволей сбиваются в группы. Впереди каждой группы – тихоход, который по каким-то причинам движется медленнее, чем все автомобили перед ним. Вопрос: сколько в среднем образуется групп, если известно, сколько в среднем автомобилей на таком участке шоссе?

Задача кажется совершенно неопределенной, но она практическая. Более того, она вполне может быть решена в средней школе.

Во второй главе мы рассмотрим практико-ориентированные задачи из различных областей, для решения которых нужны знания теории вероятностей и статистики.

## Глава 2. Области применения знаний вероятности и статистики в жизни

На протяжении жизни мы встречаемся с явлениями или действиями, исход которых зависит от случая. Их обычно называют случайными явлениями (испытаниями), например:

- наступление страхового случая;
- выпадение определенного номера билета на экзамене;
- выпадение очков при бросании игрального кубика в настольной игре;
- выпадение номеров в лотереи «Спортлото»;
- выпадение номера бочонка при игре в лото;
- определение футбольной команды, начинающей игру ударом с центра поля;
- предсказание прогноза погоды на длительный срок и т. д.

Анализ подобных ситуаций, попытка обнаружить в них определенные закономерности в большей степени стимулировали возникновение такой науки как теория вероятностей и математическая статистика.

В современном мире теория вероятностей – это интересный, важный и достаточно сложный раздел науки, имеющий применение в профессиональной и социальной сферах, в повседневной жизни. Вот только несколько серьезных вопросов, решить которые помогают знания теории вероятностей.

Сколько денег нужно заложить в банкомат, чтобы практически наверняка хватило на полный день?

Сколько нужно иметь операторов в банке, чтобы скопление клиентов в очереди было редким явлением?

Сколько нужно иметь кассиров и автоматов самообслуживания в гипермаркете, чтобы скопление покупателей в очереди было минимальным?

Каким должен быть минимальный страховой взнос, чтобы страховая компания практически наверняка получила установленную прибыль?

Какова вероятность заморозков на поверхности почвы на Урале в мае?

Какова вероятность почвенной засухи в пахотном слое почвы (на дату посева основных сельскохозяйственных культур)?

Каким должен быть минимальный запас медикаментов в городе, чтобы практически наверняка хватило в случае стихийного бедствия, характерного для данной местности?

Сколько нужно запастись порций курицы и рыбы в самолет, чтобы не было недовольных пассажиров? И другие.

### Рекомендации учителю

На уроках по «Теории вероятности и статистике» учителю важно не только самому приводить примеры их жизни, но и давать задания обучающимся, чтобы они также подбирали примеры, и главное, обсуждать примеры, чтобы ученики понимали, в решении каких вопросов из жизни или профессиональной сферы применяются знания теории вероятностей статистики.

Например, как применяются статистические и вероятностные методы для анализа социальных явлений, прогнозирования развития общества, моделирования социальных процессов, исследования вероятности возникновения различных социальных сценариев. Как теория вероятности используется для анализа вероятности различных психологических явлений, прогнозирования поведенческих реакций, моделирования принятия решений человеком. Как знания теории вероятностей позволяют прогнозировать шансы на победу определенных кандидатов на различных выборах, помогают психологам понимать и объяснять разнообразные аспекты человеческого поведения.

В современном мире мы очень часто сталкиваемся со страхованием недвижимости, автомобилей, жизни. Как страховые компании используют вероятность для определения суммы денег, которую люди будут тратить на страхование автомобиля или здоровья каждый год. Как влияют на определение суммы такие факторы, как возраст, существующие медицинские условия, текущее состояние здоровья и т. д. Почему страховым компаниям важно понимать масштабы страхового случая, почему завышенная оценка прибыли компании может привести к потере некоторой доли рынка, а недооценка может привести к банкротству. Как экономисты используют теорию вероятностей для защиты от экономических рисков.

Как дорожные инженеры используют условную вероятность для прогнозирования вероятности возникновения пробок на основе неисправности светофора, ремонта участка дороги или моста, чтобы решить, нужно ли им разработать другой маршрут для перенаправления трафика.

Почему предпринимателю, прежде чем выпускать конкретный продукт на рынок, необходимо изучить спрос и предложение, рассмотреть риски.

Понимание вышеперечисленных вопросов, того, что в обычной жизни люди постоянно строят вероятностные прогнозы, например, о том, насколько плохим будет дорожное движение в течение определенного времени и как проехать до работы, учебы в зависимости от времени суток, местоположения в городе, погодных условий и т. д. дает осознание связи теории с реальной жизнью.

Анализируя статистические данные, решая задачи из «жизни», ученики приходят к осознанию того, что нужно уметь исследовать случайные явления и находить их закономерности. Понимают, что, используя теорию вероятности и статистику, можно анализировать любую активность в любой области, а главное, предпринимать соответствующие контрдействия, исходя из полученных данных.

Рассмотрим примеры применения знаний теории вероятностей и статистики для решения задач из различных областей.

### **Теория вероятности в экономике, финансовой аналитике, маркетинге**

В экономике теория вероятности используется для анализа рисков при принятии экономических решений, моделирования поведения рынков, прогнозирования экономических показателей. Она помогает экономистам и аналитикам оценивать вероятность различных сценариев развития событий [7].

**Пример 2.** Банк А дает кредит на сумму 1 млн. руб. на срок 1 год. Вероятность невозврата долга 1%. Какую процентную ставку нужно применить для получения прибыли.

*Решение*

Обозначим через  $x$  процентную ставку ( $100 \cdot x\%$ ). Прибыль банка – случайное число. Клиенту нужно вернуть кредит с учетом процентов, однако при этом существует вероятность, что у клиента не будет возможности возврата кредита. Запишем закон распределения случайной величины  $x$  (табл. 1):

Таблица 1

Закон распределения случайной величины  $x$

$x$	-1
0,99	0,01

где  $x$  – это случай возврата долга с процентами для того, чтобы кредитная организация получила доход в  $x$  млн. руб. Вероятность возврата 99%. Вероятность невозврата 1% и того, что банк теряет 1 млн. руб., обозначается как доход равный -1.

Найдем математическое ожидание:  $0,99 \cdot x - 0,01$ .

Решив неравенство  $0,99 \cdot p - 0,01 > 0$ , получается, что  $p > 1/99$ . Таким образом, процентная ставка по кредиту должна быть выше, чем 1% ( $100/99$ )

*Ответ:* для получения прибыли следует применить процентную ставку свыше 1%.

В финансовой аналитике теория вероятностей применяется для моделирования рисков инвестиций, прогнозирования изменений цен на финансовых рынках, определения вероятности убытков и прибылей. Она помогает инвесторам и аналитикам принимать обоснованные решения на основе вероятностных расчетов.

Инвесторы используют вероятность, чтобы оценить, насколько вероятно, что определенные инвестиции окупятся.

Например, данный инвестор может определить, что существует 1%-я вероятность того, что акции компании А увеличатся в 100 раз в течение предстоящего года.

Основываясь на этой вероятности, инвестор решит, какую часть своего чистого капитала вложить в акции.

В маркетинге теория вероятности используется для анализа рыночных тенденций, прогнозирования спроса на товары и услуги, оценки эффективности маркетинговых кампаний. Она помогает маркетологам и специалистам по продажам принимать обоснованные решения на основе вероятностных расчетов.

**Пример 3.** Фирма при реализации продукции ориентируется на три сегмента рынка.

В первом сегменте объем продаж в прошлом периоде составил 8 млн. шт. при емкости рынка в этом сегменте 24 млн. шт. Предполагается, что в настоящем году емкость рынка в этом сегменте возрастет на 2%, доля фирмы – на 5%.

Во втором сегменте доля фирмы составляет 6%, объем продаж – 5 млн. шт. Предполагается, что емкость рынка возрастет на 14% при сохранении доли фирмы в этом сегменте.

В третьем сегменте емкость рынка 45 млн. шт., доля фирмы – 18%. Изменений не предвидится.

Определить объем продаж фирмы в текущем году при вышеуказанных условиях.

*Решение*

Объем продаж в настоящем году в первом сегменте составит:

$$\frac{8 \text{ млн. шт.}}{24 \text{ млн. шт.}} \times (100\% + 5\%) \times 24 \text{ млн. шт.} \times \frac{(100\% + 2\%)}{100\%} = 9,38 \text{ млн. шт.}$$

Объем продаж в настоящем году во втором сегменте составит:

$$5 \text{ млн. шт.} \times \frac{(100\% + 14\%)}{100\%} = 5,7 \text{ млн. шт.}$$

Объем продаж в настоящем году в третьем сегменте составит:

$$45 \text{ млн. шт.} \times 0,18 = 8,1 \text{ млн. шт.}$$

Общий объем продаж фирмы в настоящем году составит:

$$9,38 \text{ млн. шт.} + 5,7 \text{ млн. шт.} + 8,1 \text{ млн. шт.} = 23,18 \text{ млн. шт.}$$

*Ответ:* объем продаж фирмы в текущем году составит 23,18 млн. шт.

Многие розничные компании используют вероятность для прогнозирования шансов на то, что они продадут определенное количество товаров в данный день, неделю или месяц.

Это позволяет компаниям прогнозировать, какой объем запасов им понадобится. Например, компания может использовать модель прогнозирования, которая говорит им, что вероятность продажи не менее 100 товаров в определенный день составляет 90%.

Это означает, что им нужно убедиться, что у них под рукой есть как минимум 100 продуктов для продажи (или, желательно, больше), чтобы они не закончились.

Розничные компании используют условную вероятность для прогнозирования шансов распродажи определенного продукта на основе рекламных акций.

**Пример 4.** На рынке присутствует некоторая розничная компания, для которой известны следующие две вероятности:

$$P(\text{продвижение товара}) = 0,35.$$

$$P(\text{распродажа} \cap \text{продвижение}) = 0,15.$$

Какова вероятность того, что розничная компания распродаст в условный день часть продукта, учитывая, что в этот день проводится рекламная акция?

*Решение*

Компания розничной торговли могла бы использовать эти значения для расчета вероятности того, что она распродаст определенный продукт, учитывая, что в этот день проводится продвижение продукта:

$$P(\text{распродажа} | \text{продвижение}) = \frac{P(\text{распродажа} \cap \text{продвижение})}{P(\text{продвижение})}$$

$$P(\text{распродажа} | \text{продвижение}) = \frac{0,15}{0,35}$$

$$P(\text{распродажа} | \text{продвижение}) = 0,428$$

Вероятность того, что розничная компания распродает часть продукта, учитывая, что в этот день проводится рекламная акция, составляет 0,428.

*Ответ: 0,428.*

Продуктовые магазины часто используют вероятность, чтобы определить, сколько работников они должны запланировать на работу в данный день.

### **Рекомендации учителю**

*На уроках по «Теории вероятности и статистики» учителям следует разбирать задачи, предполагающие не только и не столько вычисления, сколько размышления и обсуждения.*

Например, для решения задачи из примера 5 потребуются дополнительные данные, характерные для конкретного магазина: план продаж, средняя заработная плата сотрудника, средняя покупательная способность. Можно обсудить с учениками, какие еще данные будут полезны. Учителю важно выстроить обсуждение и подвести обучающихся к пониманию того, что для решения подобных задач в реальной ситуации магазин ведет накопление статистических данных. Анализ накопленных данных позволяет выявить зависимости и сделать выводы для принятия решения.

**Пример 5.** Продуктовый магазин может использовать модель, которая говорит ему, что существует 75%-я вероятность того, что в определенный день в магазин зайдет более 800 покупателей.

Исходя из этой вероятности, планируется присутствие определенного количества работников в магазине в этот день, чтобы обслуживать такое количество покупателей.

*Спланируйте обсуждение и решение данной или подобных задач.*

### **Рекомендации учителю**

Разделить класс на группы и дать, например, следующие задания.

1. Подготовить краткую справку об использовании теории вероятностей для анализа рисков при принятии экономических решений. Попробовать подобрать или сформулировать задачу на определение вероятности минимизации рисков для получения прибыли фирмы.
2. Подготовить краткую справку о проведении анализа рыночных тенденций. Попробовать подобрать или сформулировать задачу на определение вероятности тенденции, ведущей к получению прибыли.
3. Подготовить краткую справку о прогнозировании спроса на товары и услуги в преддверии праздника (на выбор). Попробовать подобрать или сформулировать задачу на определении вероятности получения дополнительной прибыли при проведении акции: скидка на определенный товар, услугу?

## **Теория вероятности в технике и промышленности**

В технике и промышленности теория вероятностей используется для анализа надежности технических систем, прогнозирования отказов оборудования,

оценки рисков производственных процессов. Она помогает инженерам и менеджерам принимать обоснованные решения на основе вероятностных расчетов.

**Пример 6.** Завод отправил на базу 5000 деталей. Вероятность повреждения детали в пути равна 0,0002. Найти вероятность, что среди отправленных деталей будет повреждено:

- а) три детали;
- б) одна деталь;
- в) более двух деталей.

*Решение*

Проверим условие для применения формулы Пуассона.

$p=0,0002$  (формула применяется при  $p \leq 0,1$ )

$n=5000$

$\lambda=n \cdot p=5000 \cdot 0,0002=1$  (формула применяется  $\lambda \leq 10$ )

а)  $k=3$ , тогда  $P \approx 1/(3!) \cdot e^{-1} \approx 1 / (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2,7) \approx 0,06$

б)  $k=1$ , тогда  $P = 1/e=0,36784706 \approx 0,37$

в) сначала найдем событие противоположное искомому: не более двух, т. е. 0, 1, 2

$P=P(0) + P(1) + P(2) \approx 1/0! \cdot e^{-1} + 1/1! \cdot e^{-1} + 1/2! \cdot e^{-1} \approx 0,919$

Тогда искомое событие противоположно данному:  $1-0,919 = 0,091$

*Ответ:* а) 0,06 б) 0,37 в) 0,091

**Пример 7.** Из 980 новых карт памяти в среднем 49 бракованные. Какова вероятность того, что случайно выбранная карта памяти будет пригодна для записи?

*Решение*

Из 980 карт памяти исправны  $980 - 49 = 931$  шт. Поэтому вероятность того, что случайно выбранная карта памяти пригодна для записи, равна:

$$P(A) = \frac{931}{980} = 0,95$$

*Ответ:* вероятность того, что случайно выбранная карта памяти будет пригодна для записи равна 0,95.

Рассмотрим примеры задач, в которых вероятности заданы в процентах.

### Рекомендации учителю

Вероятность случайного события может быть любым числом между нулем и единицей. То есть для любого случайного события верно соотношение:  $0 \leq P(A) \leq 1$ . В обыденной речи, в некоторых книгах и в средствах массовой информации можно встретить выражение: «вероятность события составляет столько-то процентов». Важно при формализации условия задачи уходить от использования в школьном курсе измерения вероятностей событий в процентах. Это позволяет учащимся избегать ошибок при вычислении вероятностей, дает им дополнительный инструмент контроля возможных ошибок.

**Пример 8.** В соответствии с техническими условиями пекарь положил в 1000 булочек 2000 изюминок. Можно ли убедить знающего эту норму покупателя не писать жалобу, если тот обнаружил в 40 булочках всего 1 изюминку?

*Решение*

Рассмотрим следующую схему испытаний.

Всего имеется  $n=2000$  испытаний (число изюмин). Испытание с номером  $k$  состоит в том, что изюмина с номером  $k$  попала в выбранную нами булочку.

Поскольку булочек 1000, то вероятность того, что именно  $k$ -тая изюминка попала в нашу булочку равна  $p = 1/1000 \leq 0,1$ .

Так как число изюмин равно 2000, то  $n = 2000$  в испытаниях Бернулли. Найдем величину  $\lambda = n \cdot p = 2000/1000 = 2 \leq 10$ , что составляет среднее число изюмин в булочке. Мы видим, что можно воспользоваться для нахождения искомой вероятности формулой Пуассона, где  $k = 0$  (нет изюма):

$$P = 2^0/0! \cdot e^{-2} \approx 0,1353$$

В нашем случае из 40 булочек 39 без изюма, т. е.  $P=39/40=0,945$

*Ответ: Да.*

**Пример 9.** Автомагазин работает с двумя фирмами, изготавливающими аккумуляторы для автомобилей. Первая фирма поставляет 70%, из которых 1% оказывается бракованным, вторая компания поставляет 30%, и из них 3% могут быть бракованными. Определить вероятность покупки неисправного аккумулятора в автомагазине.

*Решение*

*Возможен следующий способ рассуждения.*

Событие  $A$  – покупка неисправного аккумулятора в автомагазине.

$P(A)$  – вероятности того, что купленный аккумулятора неисправен;

$P(B_1)$  – вероятность того, что аккумулятор был поставлен первой фирмой;

$P(B_2)$  – вероятность того, что аккумулятор был поставлен второй фирмой.

Вычислим вероятность покупки неисправного аккумулятора:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

$$P(A) = (0.70) \cdot (0.01) + (0.30) \cdot (0.03)$$

$$P(A) = 0,014$$

*Ответ:* вероятность покупки неисправного аккумулятора в автомагазине составляет 0,014.

**Пример 10.** Две фабрики выпускают одинаковые стеклопакеты. Первая фабрика выпускает 35% этих стеклопакетов, вторая – 65%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стеклопакетов, а вторая – 1%. Найдите вероятность того, что случайно заказанный стеклопакет окажется бракованным.

*Решение*

*Разберем альтернативный способ рассуждения.*

Вероятность того, что стеклопакет сделан на первой фабрике и он бракованный:  $0,35 \cdot 0,03 = 0,0105$ .

Вероятность того, что стеклопакет сделан на второй фабрике и он бракованный:  $0,65 \cdot 0,01 = 0,0065$ .

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна  $0,0105 + 0,0065 = 0,017$ .

*Ответ: 0,017.*

Сегодня многие заказывают товары через интернет-магазины. Эта возможность отражается в условиях задач, предлагаемых для подготовки к ВПР, ОГЭ.

**Пример 11.** По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надежность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина  $A$ , равна  $0,8$ . Вероятность того, что этот товар доставят из магазина  $B$ , равна  $0,9$ . Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

*Решение.*

Событие  $A$  – первый магазин не доставит нужный товар, соответственно событие  $B$  – второй магазин не доставит нужный товар.

Тогда вероятность того, что первый магазин не доставит нужный товар равна:  
 $P(A) = 1 - 0,8 = 0,2$ .

Вероятность того, что второй магазин не доставит нужный товар равна:

$$P(B) = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Поскольку эти события независимы, вероятность их произведения (оба магазина не доставят товар) равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02.$$

*Ответ:* вероятность того, что ни один магазин не доставит товар составляет  $0,02$ .

**Пример 12.** На фабрике керамической посуды  $10\%$  произведенных тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется  $80\%$  дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов.

*Решение*

Тарелки поступившие в продажу  $0,9 + 0,1 \cdot 0,2$  ( $90\%$  без дефекта и  $20\%$  из  $10\%$  не выявленный дефект) – это общее количество.

$0,9$  тарелок не имеют дефектов. Тогда искомая вероятность

$$P = 0,9 / (0,9 + 0,1 \cdot 0,2) \approx 0,98$$

*Ответ:*  $0,98$

### **Рекомендации учителю**

*Разделить класс на группы и дать, например, следующие задания.*

1. Подготовить краткую справку об использовании теории вероятностей в прогнозировании отказов оборудования. Попробовать подобрать или сформулировать задачу на определение вероятности безотказной работы оборудования (на выбор).
2. Подготовить краткую справку об использовании теории вероятностей в прогнозировании надежности технических систем. Попробовать подобрать или сформулировать задачу на определение вероятности надежной работы системы (на выбор).

## Спорт и теория вероятности

В спорте теория вероятности используется для определения порядка, в котором спортсмены стартуют, анализа вероятности победы команд или спортсменов, прогнозирования результатов соревнований, оценки рисков травм. Она помогает тренерам, спортсменам и аналитикам делать прогнозы и строить стратегии на основе вероятностных расчетов [9].

**Пример 13.** В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из России.

*Решение*

Определим событие  $A$ : первым стартует спортсмен из России.

Находим сколько всего спортсменов участвует в лыжных гонках:

$11 + 6 + 3 = 20$  (человек).

По классическому определению вероятности вычисляем вероятность события  $A$ :

$$P(A) = \frac{11}{20} = 0,55$$

*Ответ:* вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из России, равна  $= 0,55$

**Пример 14.** Турнир по настольному теннису проводится по олимпийской системе: игроки случайным образом разбиваются на игровые пары: проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победитель, выходит в следующий тур, где встречается со следующим противником, который определен жребием.

Всего в турнире участвует 8 игроков, все они играют одинаково хорошо поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и проигрыша у каждого игрока равна  $0,5$ . Среди игроков два друга – *Иван* и *Алексей*. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре предстоит сыграть друг с другом?

*Решение*

Сосчитаем общее количество возможных партий  $8 \cdot (8-1) = 56$ .

Но не все партии будут сыграны, т. к. проигравшие выбывают.

Сосчитаем число нужных партий 1-й тур 4 пары, 2-й тур 2 пары, последний 3-й тур, одна пара. Таким образом получаем:

$4+2+1=7$ .

$P=7/56=0,125$

*Ответ:*  $0,125$

### Рекомендации учителю

*Разделить класс на группы и дать, например, следующие задания.*

1. Подготовить краткую справку о проведении анализа вероятности победы команды (на выбор) или спортсмена (на выбор). Попробовать сформулировать задачу на определение вероятности победы выбранной команды или спортсмена.

2. Подготовить краткую справку об оценке рисков травм спортсмена, каскадера (на выбор). Попробовать сформулировать задачу на определение вероятности выступления спортсменом (каскадером...) без травмы.
3. Подготовить краткую справку о выборе стратегии выигрыша определенной командой на основе вероятностных расчетов. Попробовать сформулировать задачу на определение вероятности выигрышной стратегии выбранной команды.

### Прогнозирование погоды

Вероятность используется синоптиками для оценки вероятности того, что в определенный день в определенном районе будет дождь, снег, облачность и т. д. Ежедневно, а порой и несколько раз в течение дня, мы интересуемся прогнозом погоды. Но на основании чего строятся прогнозы, что означает сообщение «завтра возможность выпадения осадков составляет 40%», и насколько прогнозам можно доверять?

Далеко не всегда можно абсолютно точно предсказать погоду в каком-то определенном месте и в определенное время. Природа слишком сложна, причем значительное влияние на нее оказывает сам человек, поэтому смоделировать поведение воздушных масс с абсолютной точностью, даже используя самые современные модели, практически невозможно. Зато можно рассчитать вероятность прогноза [12]. Проще говоря, прогноз будет выглядеть так: солнечно, без осадков, с вероятностью 95%. И сразу станет понятно, довериться ли этому прогнозу или все-таки захватить на всякий случай зонтик – если вероятность прогноза будет невысокой.

**Пример 15.** Используя результаты наблюдений, представленные в таблице, определите вероятность наступления морозных дней в 2023–2024 гг.

Год	День наступления зимы	Количество морозных дней	Количество зимних дней
2016–2017	21 ноября	10	98
2017–2018	4 декабря	13	86
2018–2019	3 ноября	7	116
2019–2020	11 ноября	6	119
2020–2021	6 ноября	5	110
2021–2022	25 ноября	9	144
2022–2023	9 ноября	15	141
Всего		65	814

#### *Решение*

В данной задаче, так же как и в примере 5, больше времени стоит уделить размышлениям и обсуждению, чем самому решению. Возможные вопросы для организации беседы:

- Какие дни на Урале считаются морозными?

- Какие ситуации возникают в морозные дни, например, с работой транспорта и почему?
- Учителя при планировании учитывают морозные дни и организацию уроков с малой посещаемостью.
- Почему возможен скачек напряжения?
- Какие проблемы могут возникнуть с теплоснабжением?
- Почему в поликлиниках и травм пунктах увеличивается количество обращений?

Событие  $A$  – наступление морозных дней в 2023–2024 гг.

$$P(A) = \frac{65}{814} = 0,079$$

*Ответ:* вероятность наступления морозных дней в 2023-2024 гг. составляет 0,079.

**Пример 16.** На южном острове погода бывает двух типов: отличная и хорошая. На этом острове погода стабильная, то есть, установившись утром, она не изменяется весь день. Синоптики предвещают туристам, что завтра погода будет такой же, какой была сегодня, с вероятностью 0,6. Сегодня 18 июля, и погода хорошая. Найдите вероятность того, что 21 июля погода на острове будет отличной.

*Решение*

Так как 18 июля погода хорошая, то 19 июля с вероятностью 0,6 погода хорошая, а с вероятностью 0,4 отличная.

Согласно условию, если 19 июля погода хорошая, то 20 июля вероятность хорошей погоды (как вероятность произведения) будет равна

$$0,6 \cdot 0,6 = 0,36,$$

а вероятность отличной погоды равна

$$0,6 \cdot 0,4 = 0,24.$$

Аналогично, если 19 июля погода отличная, то с вероятностью

$$0,4 \cdot 0,6 = 0,24$$

она будет отличной и 20 июля.

Хорошей 20 июля погода в этом случае будет с вероятностью

$$0,4 \cdot 0,4 = 0,16.$$

Далее рассуждая аналогично, получаем схему (рис. 1) [10]:

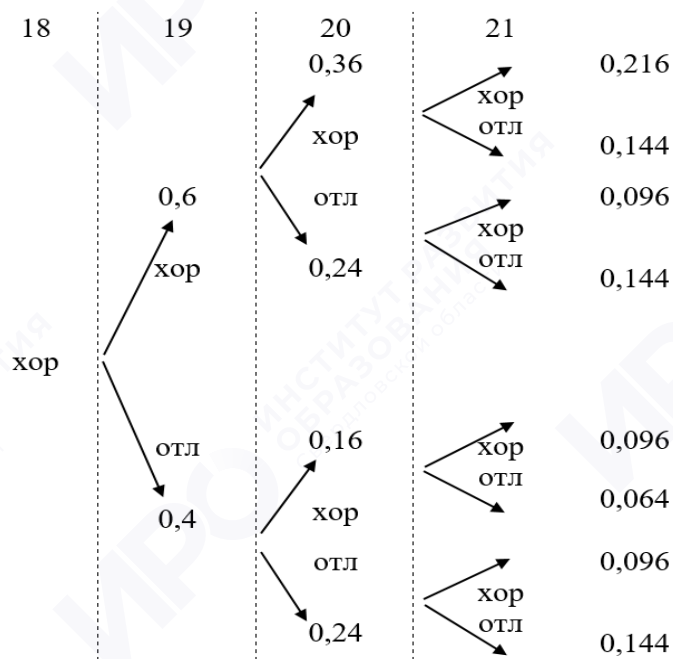


Рис. 1. Схема рассуждения

Вероятность отличной погоды 21 июля будет (как вероятность суммы) равна:

$$0,144 + 0,144 + 0,064 + 0,144 = 0,496.$$

*Ответ:* вероятность отличной погоды 21 июля составляет 0,496.

Это упрощенные примеры, но в реальной жизни синоптики используют компьютерные программы для сбора и анализа статистических данных о текущих погодных условиях и условную вероятность для расчета вероятности будущих погодных условий. Для подсчета вероятностей нужно несколько раз решить системы уравнений, используя разные алгоритмы или немного изменяя начальные данные. Сравнивая результаты, можно оценить точность прогноза. Чем точнее требуется получить прогноз, тем более возрастает объем вычислений, поэтому вероятностное прогнозирование погоды требует увеличения мощности компьютеров тоже в несколько раз.

Оперативное предсказание погоды на основе математической модели стало возможным с появлением производительных компьютеров. Но современным метеорологическим службам для точного расчета прогнозов требуются особенные мощнейшие вычислительные комплексы – кластеры, использующие суперкомпьютерные технологии.

### Рекомендации учителю

Разделить класс на группы и дать, например, следующие задания.

1. Подготовить справку: какова производительность кластеров, используемых для расчетов прогноза погоды?
2. Какие возможности получили метеорологи для решения задач прогнозирования с вводом высокопроизводительных кластеров?
3. Какие модели используются в прогнозировании погоды? Что собой представляет комплексная модель нашей планеты?

4. Какие прогнозы сегодня используются, и насколько отличается вероятность каждого из них? Что собой представляет ансамблевый прогноз?

### Теория вероятности в образовании, в биологических и медицинских исследованиях

В образовании теория вероятностей используется для анализа успеваемости обучающихся, прогнозирования их результатов на экзаменах, оценки эффективности образовательных программ. Она помогает педагогам и администрации учебных заведений принимать обоснованные решения на основе вероятностных расчетов.

**Пример 17.** Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трех предметов – математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трех предметов – математика, русский язык и обществознание. Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку – 0,8, по иностранному языку – 0,7 и по обществознанию – 0,5. Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

*Решение*

$$P(\text{поступление на лингвистику}) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,336$$

$$P(\text{не поступил на лингвистику, но поступил на коммерцию}) = 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 0,072$$

$$\text{Итого } 0,336 + 0,072 = 0,408$$

*Ответ. 0,408*

Так как наблюдения – есть неотъемлемая часть всякого методического эксперимента, теория вероятностей и статистика может помочь в экспериментальной деятельности, например, выявить определенную закономерность или случайность при использовании того или иного педагогического приема.

Теория вероятности используется в биологических и медицинских исследованиях для анализа статистических данных, прогнозирования результатов клинических испытаний, оценки рисков заболеваний и других задач. Методы теории вероятности помогают ученым делать выводы на основе вероятностных моделей [11].

**Пример 18.** *Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом пациентов анализ дает положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.*

*Решение*

Найдем вероятность положительного результата у поступившего больного пациента  $P_1=0,05*0,9=0,045$ .

Найдем вероятность положительного результата у поступившего здорового пациента  $P_2=0,95*0,01=0,0095$

$$P_1 + P_2 = 0,045 + 0,0095 = 0,0545$$

*Ответ.* 0,0545

## Заключение

Преподавание нового курса «Вероятность и статистика» для обучающихся в общеобразовательной школе в рамках реализации обновленного ФГОС ОО по предмету «Математика» представляет собой целенаправленный процесс, направленный на развитие математических знаний и навыков учеников, а также их способности применять математику в реальной жизни. Использование практических задач, современных информационных технологий и связь с реальными примерами делает этот курс не только содержательным, но и интересным для учеников.

В рамках данного курса следует делать акцент не только на доказательствах и вычислениях, а на ясном понимании обучающимися концепций изменчивости, средних, рассеивания, выборочных исследований, случайных величин, закона больших чисел. Многие понятия и факты становятся доступны школьникам в процессе анализа данных, обсуждения, сопоставления, размышления, споров и проведения эксперимента.

Для формирования математической грамотности в рамках курса необходимо, чтобы школьное содержание учебного курса было вплотную приближено к вопросам страхования, торговли, банковских услуг, медицинского обслуживания, управления и принятия решений, к погрешностям измерений любого рода – к явлениям, известным школьникам или их родителям из повседневного опыта, явлениям, значимость которых не вызывает сомнений.

## Библиографический список

1. Белослудцев О. А. Методика обучения решению задач по теории вероятностей: методические рекомендации / О. А. Белослудцев, В. Б. Соловьянов, Л. Е. Шмакова; Министерство образования и молодежной политики Свердловской области, Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования Свердловской области «Институт развития образования». – Екатеринбург: ГАОУ ДПО СО «Институт развития образования», 2022. – 30 с.
2. Вероятность и статистика – ворота из школьной математики в жизнь [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.olimpiada.ru/article/1089> (дата обращения – 06.06.2024).
3. Вероятность и статистика: Учебник для 7–9 классов, базовый уровень. Часть 1/ И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко; под редакцией И. В. Яценко. – 1-е изд. – М.: Просвещение, 2023.
4. Вопросы формирования и оценивания функциональной грамотности средствами учебных предметов : учеб.-метод. пособие / Е. С. Баранова [и др.]; под ред. И. Е. Барыкиной, Е. В. Иваньшиной. – СанктПетербург: ГАОУ ДПО «ЛОИРО», 2021. – 230 с. – (Школа функциональной грамотности) – ISBN 978-5-91143-816-6.
5. Гаваза Т. А. О преподавании теории вероятностей в средней школе. Методический аспект/ Серия «Естественные и физико-математические науки». / Т. А. Гаваза. – Текст: непосредственный // Вестник ПсковГУ. – 2014. – № 4. – С. 21–30.
6. Гатауллина Л. Теория вероятности в жизни [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://nsportal.ru/ap/library/nauchno-tekhnicheskoe-tvorchestvo/2012/01/07/teoriya-veroyatnosti-v-zhizni> (дата обращения 04.06.2024).
7. Игнатъева Д. С. Теория вероятностей и ее применение в области экономики / Д. С. Игнатъева, И. А. Филиппова. – Текст : непосредственный // Молодой ученый. – 2022. – № 22 (417). – С. 176–178. – URL: <https://moluch.ru/archive/417/92069/> (дата обращения: 16.06.2024).
8. Математика. Вероятность и статистика : 7–9-е классы : базовый уровень : методическое пособие к предметной линии учебников по вероятности и статистике И. Р. Высоцкого, И. В. Яценко под ред. И. В. Яценко. – 2-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2023. – 38 с.
9. Математика. Подготовка к ОГЭ-2024. 9 класс. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2024 года : учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С. О. Иванова, - Ростов н/Д : Легион, 2023. – 384 с. – (ОГЭ).
10. Мордкович А. Г. События. Вероятности. Статистическая обработка данных: Дополнительные параграфы к курсу алгебры 7–9 кл. общеобразов. учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 6-е изд. : М.: Мнемозина, 2012. – 112 с. – Текст: непосредственный.

11. Трофимова Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / Е. А. Трофимова, Н. В. Кисляк, Д. В. Гилев; [под общ. ред. Е. А. Трофимовой]; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018. – 160 с.
12. Яценко И. В. ЕГЭ. 2023 Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты. 10 вариантов / сборник / И. В. Яценко, И. Р. Высоцкий, Е. А. Коновалов. – М.: Национальное образование, 2022. – 80 с. – Текст: непосредственный.

## Интернет-ресурсы

1. Государственная статистика.
2. Росстат, раздел официальной статистики:  
[https://www.nalog.gov.ru/rn23/related\\_activities/statistics\\_and\\_analytics/](https://www.nalog.gov.ru/rn23/related_activities/statistics_and_analytics/).
2. Налоговая, раздел статистики и аналитики.
3. Министерство финансов – макроэкономика и предпринимательская активность.
4. Индекс качества городской среды: <https://xn----dtbcccdtsypabxk.xn--p1ai/#/>.
5. Роспотребнадзор – статистика по инфекционным заболеваниям с 2013 года:  
[https://www.rospotrebnadzor.ru/activities/statistical-materials/?PAGEN\\_1=5](https://www.rospotrebnadzor.ru/activities/statistical-materials/?PAGEN_1=5).
6. «Яндекс», исследования: интернет-коммерция:  
<https://yandex.ru/company/researches/?tag=ecommerce>.
7. «Яндекс», исследования: статистика и исследования блогов и соцсетей:  
<https://yandex.ru/company/researches/?tag=media>.
8. «Яндекс», исследования: пробки и транспорт:  
<https://yandex.ru/company/researches/?tag=traffic-transport>.
9. 2GIS, статистика по количеству компаний по отраслям и городам:  
[https://stat.2gis.ru/#/?city=12,13,15,20,27,32,35,1,38,41,42,44,45,60,63&ru\\_bric=20,91,70&value=abs](https://stat.2gis.ru/#/?city=12,13,15,20,27,32,35,1,38,41,42,44,45,60,63&ru_bric=20,91,70&value=abs).
10. Sostav.ru, рейтинги рекламодателей по рекламным бюджетам:  
<https://www.sostav.ru/ratings/business>.
11. Mail.ru – рейтинги посещаемости сайтов: <https://top.mail.ru/Rating/>.
12. Powernet – рейтинги телеканалов: <https://www.powernet.com.ru/channels-stat>.
13. Банк России. Статистика: <https://cbr.ru/statistics/>.
14. «Бренд-аналитик» – медиатренды и упоминания тем, персон в соцсетях:  
[https://brandanalytics.ru/mediatrends/layout\\_block/news\\_blog\\_vk\\_ok\\_zen/day](https://brandanalytics.ru/mediatrends/layout_block/news_blog_vk_ok_zen/day).