Л. Е. Шмакова, В. Б. Соловьянов

Функциональная грамотность. Работа с текстовыми задачами на уроках математики

Методические рекомендации

ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
Свердловской области

Министерство образования и молодежной политики Свердловской области
Государственное автономное образовательное учреждение
дополнительного профессионального образования Свердловской области
«Институт развития образования»
Кафедра математики и информатики

Л. Е. Шмакова, В. Б. Соловьянов

Функциональная грамотность.
Работа с текстовыми задачами на уроках математики

Методические рекомендации

Екатеринбург
2023

ББК 74.262.21
Ф 94

Рецензенты:
Ю. А. Куликов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры педагогических и управленческих технологий ГАОУ ДПО СО «ИРО»;
М. Ю. Сизова, заместитель директора по УВР НГО «СОШ № 1», г. Новая Ляля

Авторы-составители:
Л. Е. Шмакова, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и информатики ГАОУ ДПО СО «ИРО»;
В. Б. Соловьянов, старший преподаватель кафедры математики и информатики ГАОУ ДПО СО «ИРО»

Ф 94 **Функциональная грамотность. Работа с текстовыми задачами на уроках математики:** методические рекомендации / Министерство образования и молодежной политики Свердловской области, Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования Свердловской области «Институт развития образования»; кафедра математики и информатики, авт.-сост. Л. Е. Шмакова, В. Б. Соловьянов. – Екатеринбург: ГАОУ ДПО СО «ИРО», 2023. – 46 с.

Настоящие рекомендации посвящены вопросам подготовки школьников к решению текстовых задач. В рекомендациях рассматривается решение текстовых заданий (на движение, на работу, на смеси и процентное содержание, задачи с целочисленным решением), представленных в банке заданий Федерального института педагогических измерений. Рассматривается деятельность учителя и обучающихся в процессе решения текстовых задач. Проводится анализ затруднений, возникающих у обучающихся при решении текстовых задач, и типичных методических ошибок учителя. Рекомендации предназначены для учителей математики общеобразовательных организаций, преподающих учебный предмет «математика».

Утверждено на заседании Научно-методического совета от 11.12.2023 № 13

ББК 74.262.21

Оглавление

Введение 4

Глава 1. Формирование функциональной математической грамотности через решение текстовых задач 6

1.1. Роль текстовых задач в формировании функциональной математической грамотности 6

1.2. Особенности текстовых задач 8

1.3. Анализ затруднений, возникающих у обучающихся при решении текстовых задач, и типичных методических ошибок учителя при работе с текстовыми задачами 12

Глава 2. Методика решения текстовых задач на уроках математики 17

2.1. Текстовые задачи на движение 17

Задания для самостоятельного решения 26

2.2. Текстовые задачи на работу 27

Задания для самостоятельного решения 32

2.3. Текстовые задачи на смеси и процентное содержание 33

Задания для самостоятельного решения 38

2.4. Текстовые задачи с целочисленным решением 39

Задания для самостоятельного решения 42

Заключение 44

Библиографический список 45

Введение

С проникновением цифровых технологий во все сферы человеческой деятельности расширяются сферы применения математического стиля мышления, растет число профессий, связанных с применением математики.

В соответствии с обновленными Федеральными государственными образовательными стандартами основного общего (далее – ФГОС ООО) и среднего общего образования (далее – ФГОС СОО) ученику важно не только уметь учиться и использовать приобретаемые знания, умения и навыки для решения учебных, но и уметь решать жизненные задачи, получать опыт разрешения проблемных ситуаций, то есть быть функционально грамотным. В пункте 35.2 ФГОС ООО обозначено, что «в целях обеспечения реализации программы основного общего образования в Организации для участников образовательных отношений должны создаваться условия, обеспечивающие возможность: формирования функциональной грамотности обучающихся, включающей овладение ключевыми компетенциями, составляющими основу дальнейшего успешного образования и ориентации в мире профессий…» [11].

Одно из наиболее распространенных определений функциональной грамотности дал советский и российский лингвист и психолог Алексей Алексеевич Леонтьев: «Функциональная грамотность – как способность использовать знания, умения, способы в действии при решении широкого круга задач за пределами учебных ситуаций, в задачах, непохожих на те, где эти знания, умения, способы приобретались» [7].

Чтобы решать задачи, начиная от учебных и завершая проблемными задачами на основе ситуаций, с которыми ученики могут столкнуться в реальной жизни, необходима читательская грамотность: способность анализировать, понимать, сравнивать и сопоставлять, делать выводы и использовать полученную информацию. Также важна математическая грамотность: умение вычленить проблему, формулировать, применять математические знания и инструментарий, интерпретировать результаты и оценивать их с позиции математики и реальной проблемы. Решая математические задачи, обучающиеся овладевают содержанием математики; решая текстовые задачи, ученики учатся применению математики.

В Федеральной рабочей программе по математике акцентируется, что «научиться решать текстовые задачи очень важно, так как, зная подходы к решению текстовых задач, ученики тем самым обучаются взаимодействию с любой задачей, которых достаточно много в других школьных предметах (физике, химии, биологии, информатике и др.) и повседневной жизни. Через решение текстовых задач формируется жизненная позиция обучающегося как активной, самостоятельной личности, формируются ключевые компетенции: универсальная целостная система знаний, умений, навыков, опыт самостоятельной деятельности и личной ответственности. Отдельная задача может нести в себе различную информацию из различных областей знаний, расширять кругозор, воздействовать на познавательные возможности, может нести эстетическую нагрузку, формировать творческие способности. Решение задач способствует воспитанию таких качеств личности, как настойчивость, трудолюбие, активность, самостоятельность, приучает к самоконтролю, формирует познавательный интерес, помогает научиться вырабатывать и отстаивать свою точку зрения, воспитывать достоинство личности. В процессе решения текстовых задач у обучающихся формируются умения и навыки моделирования реальных объектов и явлений. Решение задач формирует у обучающихся умение планировать свою деятельность, внимательно воспринимать учебную информацию, мотивировать каждый шаг деятельности, рационально оформлять результаты своих действий, осуществлять самоконтроль [16].

Методические рекомендации «Функциональная грамотность. Работа с текстовыми задачами на уроках математики» состоят из введения, двух глав и заключения.

В первой главе «Формирование функциональной математической грамотности через решение текстовых задач» рассматриваются роль текстовых задач в формировании функциональной математической грамотности, особенности текстовых задач. Анализируются затруднения, возникающие у обучающихся на этапах решения текстовой задачи. Делается попытка ответить на вопрос: «Как научить решать текстовые задачи каждого обучающегося?». Предлагаются примерные вопросы и приемы для организации деятельности учеников на каждом из этапов решения. Приемы и вопросы направлены на активизацию познавательной активности учеников, на развитие мыслительных операций, творческих способностей. Рассматриваются типичные методические ошибки учителя при работе с текстовыми задачами.

Во второй главе методических рекомендаций «Методика решения текстовых задач на уроках математики» разбирается решение текстовых заданий, представленных в банке заданий Федерального института педагогических измерений, которые используются не только при подготовке к ОГЭ по математике, но и при написании Всероссийских проверочных работ и различных диагностических контрольных мероприятиях.

Глава состоит из четырех параграфов, в каждом из которых при рассмотрении решения задачи акцент делается на осмыслении условия задачи, составлении математической модели и анализе найденного решения. С учетом вопросов и приемов, рассмотренных в первой главе, в каждом параграфе на примере одной из задач, приводится подробное описание деятельности учителя и обучающихся по работе с текстовой задачей. Далее учителям предлагается спроектировать совместную деятельность с обучающимися над задачами, для которых дается решение. И на следующем шаге предлагаются задачи для самостоятельного решения. В рекомендациях учителю к задаче говорится о применении способа решения рассматриваемой текстовой задачи или подчеркивается условие, непонимание которого приводит к типичной ошибке.

Разбор начинается с задач на движение (несколько видов), далее рассматривается решение текстовых задач на работу (три типа), на смеси (три типа), и в завершение главы разбирается решение текстовых задач с целочисленными решениями.

Мы считаем, что предлагаемые методические рекомендации будут полезны учителю в вопросах организации деятельности обучающихся по работе с текстовыми задачами; помогут педагогу выстроить траекторию движения школьника по приобретению опыта решения текстовых задач.

Глава 1. Формирование функциональной математической грамотности через решение текстовых задач

1.1. Роль текстовых задач в формировании функциональной математической грамотности

Функциональная грамотность представляет собой интегральное качество личности, которое включает в себя математическую, читательскую, естественно-научную, финансовую грамотность, а также глобальные компетенции и креативные качества личности [1].

Каждая из составляющих функциональной грамотности является значимой характеристикой. Функциональная грамотность – это комплексный образовательный результат, который во многом зависит от каждого педагога образовательной организации. От целостности или, напротив, разрозненности представлений учителя о своем предмете, его целях, системе знаний, навыков и отношений, которые с помощью предмета можно сформировать у обучающихся.

Умение решать задачи является необходимым условием успешности обучающихся по многим школьным предметам, но особенно это важно в математике. Решая математические задачи, ученики не только овладевают содержанием предмета, но и учатся думать. В процессе решения задач используются такие мыслительные операции, как анализ, синтез, обобщение, сравнение и др. Без их развития невозможны познавательная деятельность, обучение, получение опыта. Сегодня школьнику, выпускнику недостаточно знаний и умений решать учебные задачи, важно уметь применять знания и средства математики в реальных жизненных ситуациях.

Анализируя предметные результаты по учебному предмету «Математика» (включая учебные курсы «Алгебра», «Геометрия», «Вероятность и статистика») в обновленном стандарте основного общего образования, мы получаем, что обучающимся необходимы умения оперировать понятиями (на базовом уровне – 45.5.1) и свободно оперировать понятиями (на углубленном уровне – 45.5.2); выполнять действия, сравнивать и упорядочивать…; выполнять расчеты …; решать … уравнения…; делать прикидку и оценку результата вычислений, планировать, аргументировать, доказывать. При этом в стандарте подчеркивается, что важно уметь решать задачи из других учебных предметов и из реальной жизни [16].

В федеральной рабочей программе (далее – ФРП) по учебному предмету «Математика» (базовый уровень) читаем, что «изучение математики формирует у обучающихся математический стиль мышления, проявляющийся в определенных умственных навыках. Обучающиеся осваивают такие приемы и методы мышления, как индукция и дедукция, обобщение и конкретизация, анализ и синтез, классификация и систематизация, абстрагирование и аналогия. Объекты математических умозаключений, правила их конструирования раскрывают механизм логических построений, способствуют выработке умения формулировать, обосновывать и доказывать суждения, тем самым развивают логическое мышление. Обучение математике дает возможность развивать у обучающихся точную, рациональную и информативную речь, умение отбирать наиболее подходящие языковые, символические, графические средства для выражения суждений и наглядного их представления» [16].

Одной из приоритетных целей обучения математике в 5–9-х классах обозначено формирование функциональной математической грамотности: умение распознавать проявления математических понятий, объектов и закономерностей в реальных жизненных ситуациях и при изучении других учебных предметов, проявления зависимостей и закономерностей, формулировать их на языке математики и создавать математические модели, применять освоенный математический аппарат для решения практико-ориентированных задач, интерпретировать и оценивать полученные результаты [16].

Текстовые задачи изучаются в течение всего школьного курса математики и являются традиционным средством обучения математике. Они дают большой простор в тренировке мышления учащихся и в выполнении ими арифметических действий, связанных с различными практическими или специально придуманными ситуациями [17].

Текстовая задача – есть описание некоторой ситуации на естественном языке с требованиями дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие и отсутствие некоторого отношения между его компонентами или определить вид этого описания [1].

Решая текстовые задачи, обучающиеся получают опыт работы с величинами, осознают взаимосвязи между ними, получают опыт применения математики к решению практических задач. Пока педагоги стараются увязывать обучение математике с жизнью, трудно обойтись без текстовых задач – традиционного для отечественной методики средства обучения математике [17].

Анализируя ФРП учебного предмета «Математика» (базовый уровень) на уровне основного общего образования в части предметных образовательных результатов относительно решения текстовых задач, мы получаем, что обучающиеся должны уметь:

- решать текстовые задачи арифметическим способом, использовать краткие записи, таблицы, схемы, чертежи, другие средства представления данных при решении задач;
- решать задачи, содержащие зависимости, связывающие величины: скорость, время, расстояние, цена, количество, стоимость; производительность, время, объем работы, используя арифметические действия, оценку, прикидку; уметь пользоваться единицами измерения соответствующих величин;
- решать практико-ориентированные задачи, связанные с отношением величин, пропорциональностью величин, процентами; интерпретировать результаты решения задач с учетом ограничений, связанных со свойствами рассматриваемых объектов;
- решать текстовые задачи алгебраическим способом с помощью составления уравнений, неравенств, их систем, интерпретировать в соответствии с контекстом задачи полученный результат;

– применять преобразования выражений для решения различных задач из математики, смежных предметов, из реальной практики;
– переходить от словесной формулировки задачи к ее алгебраической модели с помощью составления уравнения или системы уравнений, интерпретировать в соответствии с контекстом задачи полученный результат;
– решать задачи, связанные с числовыми последовательностями, в том числе задачи из реальной жизни (с использованием калькулятора, цифровых технологий).

Таким образом, умение решать текстовые задачи является одним из основных показателей глубины освоения учебного материала, уровня развития математического образования. Роль текстовых задач при обучении математике чрезвычайно велика, поэтому они являются важным инструментом педагога при обучении математике. Текстовые задачи также помогают решать проблему мотивационного характера, о которой говорится в Концепции развития математического образования в Российской Федерации. Если мы научим обучающихся решать задачи – мы не только повысим интерес к самому предмету, но и окажем значительное влияние на формирование математического мышления ученика, что способствует успешному освоению новых знаний в разных областях.

1.2. Особенности текстовых задач

В процессе обучения математике решению текстовых задач уделяется огромное внимание. Связано это с тем, что такие задачи часто являются не только средством формирования многих математических понятий, но и, главное, – средством формирования умений строить математические модели реальных явлений, а также средством развития мышления.

Основная особенность текстовых задач состоит в том, что в них не указывается прямо, какое именно действие (или действия) должно быть выполнено для получения ответа на требование задачи.

Существуют различные методические подходы к обучению детей решению текстовых задач. Но какую бы методику обучения ни выбрал учитель, ему надо знать, как устроены такие задачи, и уметь их решать. Основными методами решения текстовых задач являются арифметический, алгебраический, геометрический, логический, практический и другие. В основе каждого метода лежат различные виды математических моделей (рис.).

Поскольку во второй главе рассматривается решение задач арифметическим и алгебраическим методами, то далее мы более подробно остановимся на описании деятельности учителя и обучающихся при решении текстовой задачи *данными* методами.

Решение несложных текстовых задач *арифметическим методом* развивает сообразительность, умение анализировать предлагаемые ситуации, позволяет не только находить главный вопрос, но и определять порядок выполнения действий для получения необходимого результата. Одну и ту же задачу можно решить различными арифметическими способами, используя при решении логику рассуждений. Но научить понимать задачи, анализировать условие, рассуждать и находить рациональные способы решения необходимо в 5–6-х классах, пока уровень сложности их невелик, а сама задача является одной из самых важных категорий.

Рисунок. Методы решения текстовых задач

Приведем последовательность действий решения текстовой задачи ***арифметическим методом***.

1. Прочитать и проанализировать условие задачи.

Описание деятельности. На данном этапе обучающимся важно несколько раз прочитать условие задачи, определить и проанализировать все числовые данные, которые входят в условие, и понять, что дано, а что нужно найти; учитель, используя вопросы, помогает ученикам осмыслить условие задачи. Если задача сложная – сделать краткую запись, которая помогает обучающимся лучше понять зависимость между величинами.

2. Составить план решения.

Описание деятельности. На втором этапе обучающимся нужно понять, какие арифметические действия приведут к решению задачи, и составить план. Задача учителя – используя вопросы, организовать обсуждение поиска способа решения. Ученики рассуждают, высказывают мнение, возможно, возвращаются к условию задачи, составляют числовое выражение и проводят вычисления.

3. Соотнести главный вопрос задачи и конечный результат вычислений.

Описание деятельности. На данном этапе важно приучить обучающихся к анализу найденного решения. Учитель акцентирует внимание на полученном решении и, задавая вопросы, направляет учеников к условию задачи. Ученики проговаривают, что нужно было найти, и анализируют полученный ответ.

Арифметический метод решения текстовых задач «демонстрирует содержательность математики…» [1].

В 6–7-х классах уже используется более универсальный метод – ***алгебраический***. Приведем этапы решения текстовой задачи алгебраическим методом.

1. Прочитать условие задачи, проанализировать содержание и формализовать условие.

Описание деятельности. Для осмысления условия задачи учителю необходимо организовать обсуждение содержания. Обучающиеся читают и анализируют текст задачи; учитель задает вопросы, способствующие пониманию условия и выявлению связей между входящими величинами. Для анализа связей между известными и неизвестными данными ученики выполняют дополнительные построения: схему, чертеж или таблицу. Педагог делает акцент на единицах измерения данных; обучающиеся, если необходимо, приводят все величины к единым единицам измерения.

2. Осуществить поиск решения и составить план решения.

Описание деятельности. Данный этап для обучающихся достаточно сложный, поскольку результатом является математическая модель задачи.

Сложность данного этапа состоит в том, что нет единой универсальной схемы определения способа решения, рекомендации носят общий характер. Каждая из задач имеет свои индивидуальные особенности, и учителю необходимо организовать обсуждение, исследование условия задачи. Важно сформировать у обучающихся понимание, что поиск способа решения может проводиться неоднократно, поскольку в процессе решения может быть сделан вывод о его ошибочности или сложности. Учитель, задавая вопросы, направляет обучающихся к выбору основного соотношения для составления уравнения или неравенства.

Рекомендуется начинать рассуждение с фраз: «Чтобы узнать – надо знать…»; «Пусть x – это…, тогда…». Ученики рассуждают, исследуют условие задачи. С учетом удобства математической записи выбирают неизвестное и вводят переменную, выражают величины задачи через неизвестное и данные. Чаще всего за неизвестное принимают или наименьшую величину, или главный вопрос задачи.

Учитель направляет учеников, помогает им перевести отношения между величинами на язык равенств и записать зависимости между величинами с помощью формул.

Следует подчеркнуть, что выбор основного соотношения является определяющим при составлении уравнений, вносит логичную стройность в словесный текст задачи, дает уверенность в ориентации и предохраняет от беспорядочных действий для выражения всех входящих в задачу величин через данные и искомые [2].

3. Составить и решить уравнение или систему уравнений или неравенств.

Описание деятельности. На данном этапе обучающимся необходимо, опираясь на условие задачи, рассуждения предыдущего этапа, составить уравнение или неравенство и найти его решение. Ученикам нужно не только правильно решать уравнение (систему уравнений) или неравенство (систему неравенств), важно уметь решать, используя разные способы, и выбирать оптимальное решение. Поэтому учителю необходимо формировать у обучающихся потребность в исследовании решений задачи и выборе наиболее рационального способа.

4. Провести анализ решения уравнения или неравенства.

Описание деятельности. Значимость данного этапа состоит в том, что ученикам нужно из всех найденных решений уравнения выбрать те, которые подходят по смыслу задачи. Задача учителя – сформировать у обучающихся потребность анализировать полученные решения и условие задачи, учитывать область допустимых значений переменных. Обычно этот этап начинается фразой: «По смыслу задачи x должна быть величиной…» (положительной, натуральной, целой, принадлежащей промежутку и т. д.). Если смысловое значение не выполнено, то найденную величину называют посторонним решением. Педагог, организуя анализ, обсуждение решения, задает вопросы, рекомендует провести проверку.

5. Записать ответ в соответствии с вопросом задачи.

Описание деятельности. Задача учителя на данном этапе – приучить обучающихся возвращаться к условию задачи и еще раз прочитывать, что нужно найти. Соотносить полученное решение с вопросом задачи.

Геометрический метод заключается в применении свойств геометрических фигур и взаимосвязи их элементов в процессе решения текстовой задачи. Данный метод делает решение текстовой задачи более наглядным и позволяет избежать громоздких вычислений. Для составления математической модели текстовой задачи чаще всего применяются отрезки и их длины, а также прямоугольники и их площади. Геометрия придает алгебре необыкновенную красоту и изящность. А вместе алгебра и геометрия представляют собой единое целое [10]. Французский математик София Жермен писала: «Алгебра – не что иное, как записанная в символах геометрия, а геометрия – это просто алгебра, воплощенная в фигурах».

Графическое изображение, описывающее условие задачи, позволяет наглядно представить ситуацию, описанную в задаче. Данный метод хорошо применять при решении задач на прямолинейное движение, также он позволяет найти и составить новые уравнения, описывающие условие задачи, а иногда и просто заменить алгебраическое решение чисто геометрическим. Особенно успешно можно применять этот метод при решении математических текстовых задач на движение и работу.

Текстовые задачи на смеси и сплавы, на совместную работу удобнее решать ***табличным методом***. Применение данного метода значительно упрощает решение задач на смешивание растворов и получение сплавов. В таблице прописывают формулу, необходимую для расчетов, и придерживаются главного правила таблицы: если есть две известные величины, то обязательно находим третью!

Таким образом, текстовые задачи можно решать арифметическим, алгебраическим, геометрическим, табличным методами, а также схематически и графически. Конечно, алгебраический метод – универсальный, но знание различных способов часто упрощает решение задачи. Владея несколькими методами решения текстовых задач, обучающиеся быстрее и рациональнее решают задачи, чувствуют себя увереннее на уроках математики.

1.3. Анализ затруднений, возникающих у обучающихся при решении текстовых задач, и типичных методических ошибок учителя при работе с текстовыми задачами

Формирование умений и навыков решения текстовых задач при обучении математике является одной из наиболее сложных проблем для педагога. Важно научить каждого обучающегося решать задачи самостоятельно. Для того чтобы работа над решением задачи стала понятной и последовательной, ученикам необходимо уметь:

- исследовать текст задания;
- понимать условие;
- выделять величины, которые даны в задаче и которые нужно найти;
- находить отношения между элементами;
- переводить вербальную модель задачи в символическую;
- определять, какое количество действий нужно совершить, чтобы ответить на вопрос задачи;
- составлять план решения задачи (рассуждая, анализируя);
- проверять правильность решения задачи.

Одним из основных затруднений решения текстовой задачи любым методом является проблема, возникающая при чтении, анализе и формализации условия. Основа любой текстовой задачи – это текст, и чтобы решить задачу, ученику нужны навыки чтения, восприятия и смыслового анализа текста.

Приведем определения понятий «Математическая и читательская грамотность» [3].

- «Математическая грамотность – это способность индивидуума формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных контекстах. Она включает математические рассуждения, использование математических понятий, процедур, фактов и инструментов для описания, объяснения и предсказания явлений. Она помогает людям понять роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, которые должны принимать конструктивные, активные и размышляющие граждане».
- «Читательская грамотность – способность человека понимать и использовать тексты, размышлять о них и заниматься чтением для того, чтобы достигать своих целей, расширять свои знания и возможности, участвовать в социальной жизни» [3].

Анализируя их, мы получаем, что математическая грамотность – это цель, а читательская грамотность – средство. То есть формирование математической грамотности возможно при условии повышения уровня читательской грамотности при работе с математическими текстами. Следует подчеркнуть, что важно не просто прочитать условие задачи, нужно осмыслить прочитанное, а для этого необходимо сформировать у обучающихся навыки смыслового чтения.

Во втором параграфе первой главы мы рассмотрели основные этапы решения текстовой задачи арифметическим и алгебраическим методами. Проанализируем, с какими затруднениями могут столкнуться обучающиеся и как педагогу организовать их деятельность на каждом из этапов, чтобы снять эти затруднения.

1. Анализируем задачу.

На данном этапе ученикам нужно понять суть задачи, определить, что известно, а что следует найти; понять, как связаны между собой данные и искомое.

Чтобы понять смысл задачи, обучающимся необходимо извлечь информацию, провести анализ, обобщение и построить речевые высказывания, передающие смысл задачи. В процессе анализа условия важно установить отношения между компонентами и определить неизвестную величину. Чтобы направлять учеников, учитель задает вопросы. Например:

– О чем идет речь в задаче?
– Что известно? Что надо найти?
– Какие процессы (процесс) описываются?
– Какая величина характеризует данный процесс?
– Как связаны величины?

Приемы, которые учитель может использовать для осмысления обучающимися условия задачи.

Ученики работают в парах.

– Текст задачи прочитывается сначала учениками про себя. Затем один из учеников читает вслух, а второй – пересказывает содержание задачи своими словами. Первый ученик, выслушав, дополняет.
– Ученики анализируют текст, подчеркивают известные величины.
– Если условие задачи объемное, делят его на смысловые части, анализируют и отбрасывают информацию, которая не несет смысловой нагрузки.

Если задача сложная, можно организовать работу в малых группах: школьники проводят анализ условия и инсценируют ситуацию, представленную в задаче.

2. Моделируем.

На этапе моделирования обучающимся необходимо перенести действия, описанные в задаче, на рисунок, чертеж, схему, отразить их в таблице или в виде функциональной зависимости. Основные затруднения на этапе моделирования связаны с тем, что обучающимся нужно отобразить сущность объектов и отношений между ними. Учителю необходимо приучать учеников соблюдать указанные в условии отношения, например, большее расстояние изображать большим отрезком. Используя вопросы, педагог организует обсуждение. Например:

– Что удобно выбрать в качестве неизвестного или неизвестных?
– Какие фразы условия используются для составления математической модели?
– Как фразу текста задачи можно записать математически?
– Чему в условии задачи соответствует символ записанной модели?
– Легко ли решить полученное уравнение (неравенство, систему уравнений, систему неравенств)?
– Кто может предложить альтернативную модель, альтернативное решение?

Для снятия затруднений педагогу необходимо применять метод моделирования при изучении математических понятий, систематически проводить работу по освоению моделей тех отношений, которые рассматриваются в задачах. Рассуждая и отображая, ученики лучше понимают содержание задачи. Передавая смысл задачи через модель, они легче устанавливают отношения между данными и искомым задачи.

Приведем приемы, развивающие умение моделировать задачу.

Ученики работают в парах или группах. Работа продолжается с учетом предыдущего этапа:

- ученики выбирают схему (рисунок, таблицу, краткую запись) к задаче из предложенных учителем;
- ученики находят и исправляют неточности в предложенной схеме (таблице, краткой записи, на рисунке);
- один из учеников читает текст задачи, второй – создает модель (схему, рисунок, таблицу, уравнение, неравенство…). Для проверки модели первый ученик пересказывает условие задачи, используя созданную схему, второй слушает и исправляет неточности в схеме задачи;
- ученики читают условие и составляют уравнение (неравенство, систему уравнений или неравенств). Затем анализируют, что соответствует каждой фразе текста задачи в полученной математической записи и чему в условии задачи соответствует каждый «символ» полученной записи (сами неизвестные, действия над ними, полученные уравнения, неравенства или их системы) [6].

Осваивая различные виды моделей, обучающиеся учатся выбирать модель, соответствующую предложенной задаче, и переходить от одной модели к другой. В процессе создания модели ученики лучше осознают способы решения задачи.

3. Решаем (уравнение или систему уравнений или неравенств).

Для нахождения решения любой задачи, в том числе и текстовой, важно не только составить уравнение, неравенство, систему уравнений или неравенств, но и решить составленное.

Трудности могут возникать при решении полученного выражения. Если в ходе рассуждения получилось выражение, которое сложно решать, рекомендуется вернуться к анализу задачи и попробовать ввести другие неизвестные, изменить их количество.

Также обучающиеся порой не могут решить составленное уравнение (системы уравнений) или неравенство (системы неравенств), поскольку не умеют применять правила, формулы, раскрывать скобки. Неверно проводят преобразования, например, нарушающие равносильность, что приводит к потере или появлению посторонних корней.

Приведем некоторые приемы для наработки опыта решения уравнений.

- Учитель предлагает ученикам задачу с пропусками и справочный материал. В задании предлагается заполнить пропуски в тексте задачи, используя справочный материал, и решить задачу.

– Дается условие задачи и ряд уравнений. Обучающимся необходимо определить уравнение, с помощью которого можно решить данную текстовую задачу.
– Вместе с текстом задачи дается выражение, которое нужно дополнить до уравнения к данной задаче.

4. Анализируем решение.

На данном этапе формируется умение рассуждать, исследовать; активизируются познавательная деятельность обучающихся и способность к самоконтролю.

Сложность данного этапа состоит в том, что ученики, получив решение, торопятся записать ответ и не уделяют внимания анализу полученного решения. Ошибки возникают, например, при записи единиц измерения из-за невнимания к области определения полученного решения и др.

Для определения точности решения задачи учитель может использовать, например, следующие способы.

– Прикидка ответа до решения. В процессе обсуждения, анализа задачи обучающиеся устанавливают границы возможных значений неизвестного.
– Прием подстановки. Когда задача решена и ученики получили ответ, учитель направляет их к условию задачи и задает вопрос о том, соответствуют ли числа, полученные в результате решения задачи, числам, данным в условии.
– Решив прямую задачу, обучающиеся составляют и решают обратную задачу.
– Учитель организует решение задач по группам разными способами. Ученики представляют решение. Анализируют и сравнивают и ход решения, и полученные результаты, выбирают оптимальное решение.

При обучении решению текстовых задач учителю необходимо развивать интерес, креативность и критическое мышление учеников. В соответствии с обновленными стандартами у обучающихся необходимо формировать исследовательские навыки. Следующие приемы можно использовать, чтобы приучать ученика к роли исследователя.

– На основе решенной задачи обучающиеся составляют свою задачу, используя новые данные, и решают ее. Ученики учатся обобщать задачи одного вида, запоминать и переносить схему решения.
– В решенной задаче ученики заменяют известную величину (величины) неизвестной. Исследуют полученную задачу, анализируют изменения, находят решение.
– В условия решенной задачи обучающиеся вносят изменения. Находят решение, анализируют изменения в решении и делают выводы.

Таким образом, умение обучающихся решать текстовые задачи во многом зависит от профессионализма учителя. От того, насколько методически грамотно он организовывал работу с задачей, учитывая особенности каждого этапа.

Рассмотрим типичные методические ошибки учителя при работе с текстовыми задачами.

1. Пропуск этапа анализа условия задачи.

Достаточно часто учитель дает задание ученикам прочитать условие задачи и приступить к решению. Кто-то из обучающихся выходит к доске. Конечно же, всегда в классе есть такие ученики, у которых этап анализа свернут. Они, читая задачу, сразу видят решение и решают. Задача педагога – используя вопросы, помочь осознать смысл задачи тем, у которых это самостоятельно не получается.

2. Смешение этапов анализа и поиска решения.

Не понимая смысл задачи, обучающиеся не могут выявить все имеющиеся связи между данными и искомыми величинами. Соответственно, затрудняются, например, выразить неизвестную величину через известные, могут потерять условие для составления уравнения, не могут предложить альтернативные способы решения задачи, выбрать метод или составить план решения.

3. Пропуск этапа поиска решения.

Зачастую, когда обучающиеся все вместе решают задачи, вопросов не возникает. При этом у доски находится ученик, который понял задачу и осознал, как ее решить. Когда же педагог предлагает, например, следующую задачу решить самостоятельно, то, как правило, треть учеников не справляется.

4. Пропуск этапа исследования решения.

Мы в начале параграфа рассмотрели значимость данного этапа. И если учитель пропускает этап исследования, то ученики привыкают, получив ответ, завершать задачу. Они не задумываются, что полученное значение надо проверить, возможно, рассмотреть альтернативные способы решения. И как правило, при внешнем оценивании, решая задачи, дают неверные ответы.

Таким образом, учителю важно выработать у обучающихся алгоритм действий, приводящих к решению текстовой задачи. И достичь этого можно, используя вопросы. Задавая вопросы, направлять учеников, помогать осознать смысл задачи, совершать микрооткрытия и получать опыт решения задач.

Следует также отметить, что, задавая вопросы, педагог не должен вести учеников к своему решению. Важно организовывать обсуждение, учить слушать и слышать, обсуждать, анализировать все предлагаемые варианты решения. Если обучающиеся допускают ошибки, то важно рассматривать их как обратную связь. Необходимо анализировать их вместе с учениками, выстраивать индивидуальные траектории устранения причины непонимания.

Подчеркивая роль текстовых задач в развитии функциональной грамотности, следует развивать у обучающихся способность представлять жизненную ситуацию, отраженную в задаче. Тогда каждая решенная задача позволит ученикам накапливать опыт, который им пригодится в дальнейшем.

Глава 2. Методика решения текстовых задач на уроках математики

Текстовые задачи являются одной из самых востребованных тем, которые представлены в контрольно-измерительных материалах государственной итоговой аттестации по математике, особенно в основном государственном экзамене (ОГЭ). К ним относятся задания под номерами 1–5, так называемые «Практико-ориентированные задачи», а также задания № 14 «Задача о свойствах последовательностей» и № 21 «Текстовая задача на движение, работу, проценты и т. д.».

Рассмотрим некоторые способы и приемы решения текстовых заданий, представленных в банке заданий Федерального института педагогических измерений, которые используются не только при подготовке к ОГЭ по математике, но и при написании всероссийских проверочных работ и проведении различных диагностических контрольных мероприятий.

При рассмотрении решения текстовых задач будем акцентировать внимание на следующих *основных этапах* их решения:

1) осмысление условия задачи и составление математической модели;
2) работа с полученной математической моделью и анализ всех возможных способов решения;
3) ответ на вопрос задачи с проверкой найденного решения.

На каждом из этапов учителю необходимо организовать деятельность обучающихся по освоению способа или приема решения. В соответствии с обновленным ФГОС ООО педагогу важно использовать вопросно-ответную форму обучения. Задавая вопросы, направлять учеников находить решение, приходить к выводам.

В каждом параграфе данной главы на примере одной задачи подробно разобрано, как организовать деятельность обучающихся по решению текстовой задачи на каждом этапе. Приведены примерные вопросы для анализа условия задачи, обсуждения и построения модели, анализа способов решения и проверки полученного решения. Рекомендуем учителям в каждом параграфе сначала познакомиться с полным описанием организации работы обучающихся по решению текстовой задачи. Затем перейти к задачам, для которых приведено решение, и спроектировать на примере разобранной задачи свою деятельность и деятельность обучающихся. И завершить работу с параграфом задачами для самостоятельной работы.

2.1. Текстовые задачи на движение

Текстовые задачи, связанные с движением объекта, являются основным видом заданий и имеют наибольшее количество своих разновидностей. К таким заданиям относятся:

1) задачи на движение в одном направлении;
2) задачи на сближение или удаление объектов;
3) задачи на движение по реке.

В их содержание включены три физические величины: скорость (v), время (t), расстояние (путь) (S), связанные пропорциональной зависимостью

$S=v\cdot t$, применение которой формально возможно при так называемом равномерном прямолинейном движении, т. е. движении без ускорения. Рассмотрим несколько примеров решения таких задач.

Пример 1. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 84 км/ч, а вторую – со скоростью 108 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение

Этап 1. Осмысление условия задачи и составление математической модели.

Описание деятельности. Обучающиеся читают условие задачи. Учитель задает вопросы. Например:

– О чем говорится в задаче?
– Что известно (ученикам необходимо в тексте выделить фактографические данные)?
– Что нужно найти (главный вопрос задачи)?

Ученики, отвечая на вопросы, учатся анализировать текст. Возможные варианты ответов.

– Речь идет о пути, который проехал автомобиль.
– Известно, что первую половину пути автомобиль проехал со скоростью *84 км/ч*, а вторую – со скоростью *108 км/ч.*
– Требуется вычислить среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Для осмысления условия можно дать задание построить схему. Возможно, кто-то из учеников задаст вопрос обо всём пути автомобиля. Учителю необходимо акцентировать внимание на этом, чтобы ввести неизвестное. Применяя вопросы, педагог организует обсуждение о том, как связаны величины при равномерном прямолинейном движении. Например:

– Что сказано в тексте задачи обо всём пути?
– Как связаны физические величины: скорость, время и расстояние – при равномерном прямолинейном движении?
– Какие неизвестные требуется ввести для ответа на вопрос задачи?
– Как найти время движения автомобиля на всём маршруте и на отдельных участках пути?

Обучающиеся отвечают на вопросы, записывают формулы скорости, времени, расстояния и предлагают, например, обозначить пройденный путь через S (км), тогда половина пути будет равна $\frac{S}{2}$ (км). Далее учитель задает вопрос:

– Как найти время движения автомобиля на всём пути и на отдельных его участках?

Ответом должно быть утверждение, что полное время складывается как сумма времен на каждом участке, где каждое время находится через отношение длины пути к скорости автомобиля.

Таким образом, ученики проанализировали текст и составили математическую модель задачи. Учитель может организовать фронтальную работу над задачей, работу по группам или индивидуально. Применяя групповую или самостоятельную работу, педагог может использовать рабочий лист, в котором алгоритм работы над задачей оформлен в виде вопросов.

Этап 2. Работа с полученной математической моделью и анализ всех возможных способов решения.

Описание деятельности. Продолжая деятельность обучающихся на данном этапе, учитель дает задание записать формулы для вычисления:

- средней скорости (по определению $v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{полн}}}{t_{\text{полн}}}$);
- времени на каждом участке пути ($t_1 = \frac{S/2}{84}$ (ч) – время на 1-й половине пути и $t_2 = \frac{S/2}{108}$ (ч) – время на 2-й половине пути).

Педагогу необходимо акцентировать внимание на единицах измерения времени, поскольку в тексте задачи могут фигурировать разные единицы измерения времени, такие как минуты или секунды (см. пример 2).

Далее обучающиеся (самостоятельная работа каждого или один из учеников работает у доски) преобразуют выражение для нахождения средней скорости, проводя вычисления:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{полн}}}{t_{\text{полн}}} = \frac{\frac{S}{2}+\frac{S}{2}}{\frac{S/2}{84}+\frac{S/2}{108}} = \frac{2}{\frac{1}{84}+\frac{1}{108}} = \frac{2}{\frac{16}{756}} = \frac{2}{\frac{4}{189}} = \frac{378}{4} = 94{,}5.$$

Учитель задает вопрос о сложении дробей в знаменателе выражения. Ученики могут провести вычисление через нахождение наименьшего общего кратного чисел 84 и 108 либо $\frac{1}{84} + \frac{1}{108} = \frac{108+84}{84 \cdot 108} = \frac{192}{84 \cdot 108} = \frac{16}{7 \cdot 108} = \frac{4}{7 \cdot 27} = \frac{4}{189}$.

Итак, значение получено.

Учитель возвращает учеников к условию задачи и просит напомнить, что требовалось вычислить.

Этап 3. Ответ на вопрос задачи с проверкой найденного решения.

Описание деятельности. После получения числового значения учителю необходимо организовать обсуждение полученного ответа и проверку найденного решения. В данной задаче возможны следующие вопросы:

- Что требовалось вычислить? (Среднюю скорость автомобиля на всем протяженности пути.)
- Как записать ответ задачи?
- В каких единицах указаны скорости на разных участках пути?

Ученики возвращаются к тексту и отмечают, что в тексте задачи были указаны единицы измерения скорости на разных участках пути в км/ч, поэтому средняя скорость автомобиля 94,5 измеряется в км/ч.

Рекомендация учителю: в данной задаче применен арифметический метод решения, ответ получен путем выполнения арифметических действий над числами, связанными между собой.

При решении данной задачи обучающиеся могут допустить ошибку, посчитав, что среднюю скорость можно найти простым сложением скоростей на двух участках и делением этого полученного числа на 2, т. е. (84 + 108) / 2 = 96.

Формально это число близко к верному значению, но является неправильным, поскольку является частным случаем данного условия и работает только тогда, когда затраченное время на каждом участке одинаковое.

Учитель может организовать исследование, задав, например, вопрос:

– Почему средняя скорость автомобиля в данной задаче, вычисленная следующим образом: (84 + 108) / 2 = 96, будет неверным ответом?

Обучающиеся анализируют условие и подчеркивают, что изначально скорости по условию разные, а длины участков пути одинаковые, поэтому время, затраченное на каждом участке пути, разное.

Анализируя числовые значения дробей типа $\frac{S}{v}$ при равных числителях, но разных знаменателях, также делают вывод, что время автомобиля на участках пути разное.

Далее приводятся примеры заданий с решениями. Попробуйте спроектировать совместную деятельность с обучающимися над задачей с учетом рассмотренного выше примера.

Пример 2. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 26 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего по платформе параллельно путям со скоростью 4 км/ч навстречу поезду, за 90 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Решение

Этап 1. В данной задаче речь идет о встречном движении поезда и пешехода, при этом время движения объектов указано в секундах, а скорости – в км/ч. Для правильного построения математической модели необходимо перевести либо скорости объектов в м/с, либо время движения в часы, для второго случая полученное расстояние в км для ответа придется перевести в метры.

На наш взгляд, в силу того, что скорость 1 м/с соответствует 3,6 км/ч, целесообразно в решении задачи перевести время 90 с в часы, что соответствует $\frac{90}{3600} = \frac{1}{40}$ (ч). Кроме того, можно отметить, что путь, пройденный поездом при прохождении мимо пешехода, был бы равен длине поезда, если бы пешеход не двигался, однако при встречном движении скорости объектов суммируются, поэтому для вычисления реальной длины поезда необходимо учитывать также скорость движения пешехода.

Этап 2. Найдем скорость сближения объектов, вычислив их сумму, тогда получим $v_{\text{сум}}$ = 26 + 4 = 30 (км/ч), значит, путь, пройденный совместно пешеходом и поездом за 90 с, равен $S = v_{\text{сум}} \cdot t = 30 \cdot \frac{1}{40} = \frac{3}{4}$ км.

Этап 3. Как уже говорилось ранее, ответ задачи должен быть получен в метрах, значит, переведем единицы длины поезда (пройденного пути) из км в м, отсюда имеем: $\frac{3}{4}$ км $= 750$ м.

Замечание. Очень важно в условии задачи понимать, что когда объекты движутся навстречу друг другу, то скорости необходимо складывать; а если идет речь о движении в одном направлении, когда один объект догоняет другой, то приходится учитывать разность скоростей, которые должны быть указаны в одинаковых единицах измерения.

Пример 3. Из двух городов одновременно навстречу друг другу отправились два велосипедиста. Проехав некоторую часть пути, первый велосипедист сделал остановку на 48 минут, а затем продолжил движение до встречи со вторым велосипедистом. Расстояние между городами составляет 168 км, скорость первого велосипедиста равна 15 км/ч, скорость второго – 30 км/ч. Определите расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи.

Решение

Этап 1. Пусть x (км) – искомое расстояние, т. е. путь, пройденный вторым велосипедистом до встречи, тогда расстояние, которое проехал первый велосипедист, будет равно $168 – x$ (км). При введении неизвестного всегда удобнее вводить ограничения, опирающиеся на условие задачи, поэтому в силу данных имеем, что $0 < x < 168$. Время, затраченное первым велосипедистом, двигавшимся навстречу второму, складывается из времени остановки 48 минут, или 0,8 часа, а также самого движения при его скорости 15 км/ч, тогда получится $t_1 = 0{,}8 + \frac{168 - x}{15}$. Для второго велосипедиста легко можно получить, что его время равно $t_2 = \frac{x}{30}$. Т. к. эти времена равны по условию, тогда имеем уравнение:

$$0{,}8 + \frac{168 - x}{15} = \frac{x}{30}.$$

Этап 2. Для решения полученного уравнения умножим все части на 30, а затем приведем подобные, т. е. $24 + 2\,(168 – x) = x$ или $24 + 336 = 3x$, откуда $x = 120$.

Этап 3. Заметим, что число 120 удовлетворяет двойному неравенству, выведенному по данным задачи, поэтому естественно получится, что расстояние, пройденное вторым велосипедистом до встречи, равно 120 км.

Замечание. Представленное решение этой задачи носит алгебраический характер, так как сведено к составлению и решению уравнения, содержащего неизвестное. В качестве рекомендации для более простого восприятия и получения уравнения все данные задачи записывать в шаблон-таблицу, в нашем случае будет выглядеть (см. табл. 1):

Таблица 1

Шаблон для составления уравнения к примеру 3

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
1-й велосипедист	15	$\frac{168 - x}{15} + 0{,}8$	$168 – x$
2-й велосипедист	30	$\frac{x}{30}$	x

Пример 4. Из города A в город B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью меньше скорости первого автомобиля на 16 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью 96 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 60 км/ч.

Решение

Этап 1. Пусть S – расстояние в км между городами A и B, x (км/ч) – скорость первого автомобиля, тогда x – *16* км/ч – скорость второго автомобиля на первой половине пути (заметим, что по условию $x > 60$). Исходя из соотношения между величинами, получим, что время движения для первого автомобиля равно $\frac{S}{x}$ (ч), а для второго автомобиля складывается из времен, затраченных на преодоления различных участков пути $\frac{S/2}{x-16}$ (ч) на первой половине, $\frac{S/2}{96}$ (ч) для второй половины пути. Так как по условию эти времена совпадают, то составление математической модели сведется к решению уравнения:

$$\frac{S}{x} = \frac{S/2}{x-16} + \frac{S/2}{96} \text{ или } \frac{1}{x} = \frac{1/2}{x-16} + \frac{1/2}{96}.$$

Этап 2. Для правильного решения последнего уравнения применим соответствующий *алгоритм для решения дробно-рациональных уравнений*, а именно:

1) найдем общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, – в нашем случае $96 \cdot x \cdot (x - 16)$;
2) приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители дробей (сумм), стоящих в правой и левой частях уравнения, –
$96 \cdot (x - 16) = 0{,}5 \cdot 96x + 0{,}5 \cdot x \cdot (x - 16)$;
3) *найдем корни последнего уравнения и проверим, чтобы они не совпадали с нулями общего знаменателя* – т. е. $x \neq 0$ и $x \neq 16$. Раскрыв скобки и приведя подобные, получим квадратное уравнение $0{,}5x^2 - 56x + 1536 = 0$, дискриминант которого равен $D = 64$, отсюда корни уравнения будут равны $x_1 = 56 + 8 = 64$ и $x_2 = 56 - 8 = 48$; оба корня не являются нулями знаменателя.

Этап 3. Для ответа на вопрос задачи осталось заметить, что по условию скорость первого автомобиля должна быть больше 60 (км/ч), поэтому из двух значений корней дробно-рационального уравнения данному условию удовлетворяет число 64, таким образом, скорость первого автомобиля на всём пути будет равна 64 км/ч.

Рекомендация учителю: на примере данной задачи важно отработать не только приемы по составлению дробно-рационального уравнения, но также отработать алгоритм правильного решения такого типа уравнений, включающего проверку корней.

Пример 5. Моторная лодка прошла против течения реки 297 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 3 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Решение

Этап 1. В данной задаче речь идет о движении объекта в движущейся среде (в речной воде), которая, в свою очередь, также имеет некоторую скорость относительно неподвижного наблюдателя (точки). Поэтому важно понимать следующую связку: если объект имеет собственную скорость v (т. е. скорость в неподвижной среде), а скорость среды равна u, то скорость движения тела относительно неподвижной точки будет равна либо $v + u$, когда направления движения тела и среды совпадают, либо $v - u$, когда направления движения тела и среды противоположны. В нашем случае если в качестве неизвестного введем x (км/ч) – скорость лодки в неподвижной воде, тогда $x + 2$ (км/ч) – это скорость лодки по течению относительно наблюдателя, стоящего на берегу реки, а $x - 2$ (км/ч) – это скорость лодки при движении против течения. Сразу отметим, по условию последняя скорость не может быть отрицательной, поэтому возникает ограничение для неизвестного: $x > 2$. Для составления уравнения можно также провести аналогичные рассуждения, которые проще при обучении решению таких заданий оформить в виде таблице (формат таблицы приведен в примере 3). В нашем случае можно получить табл. 2.

Таблица 2

Шаблон для составления уравнения к примеру 5

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Лодка по течению	$x + 2$	$\frac{297}{x+2}$	297
Лодка против течения	$x - 2$	$\frac{297}{x-2}$	297

По условию задачи время движения лодки против течения на 3 часа больше времени движения лодки по течению, поэтому можно получить дробно-рациональное уравнение $\frac{297}{x+2} + 3 = \frac{297}{x-2}$ или $\frac{99}{x+2} + 1 = \frac{99}{x-2}$. Отметим, что уравнение является корректным, т. к. по правилу арифметики при равных числителях та дробь меньше, у которой больше знаменатель ($x + 2 > x - 2$).

Этап 2. Уравнение также является дробно-рациональным, поэтому к нему применяется соответствующий алгоритм решения, за одним исключением: если при составлении математической модели мы отметили ограничение на корни уравнения ($x > 2$), проверку на нули знаменателя можно не проводить. В нашем случае после преобразования получим квадратное уравнение $x^2 - 4 = 396$, откуда корни этого уравнения равны $x_{1,2} = \pm 20$, причем условию $x > 2$ удовлетворяет только $x = 20$.

Этап 3. Для ответа задачи правильно проведенный отбор корней уравнения приводит к простой констатации того факта, что 20 км/ч – скорость моторной лодки в неподвижной воде.

Пример 6. Расстояние между пристанями A и B равно 140 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот проплыл 51 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Решение

Этап 1. Пусть собственная скорость моторной лодки x (км/ч), причем $x > 3$. У плота нет собственной скорости, он движется по течению со скоростью, равной течению реки, т. е. 3 км/ч. Так же, как это было в предыдущей задаче, заполним таблицу-шаблон (табл. 3), которая помогает впоследствии составить уравнение по условию задачи.

Таблица 3

Шаблон для составления уравнения к примеру 6

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Плот	3	$\frac{51}{3} = 17$	51
Лодка по течению	$x + 3$	$\frac{140}{x+3}$	140
Лодка против течения	$x - 3$	$\frac{140}{x-3}$	140

Если учесть, что лодка отправилась вслед за плотом только через час, то ее полное время движения, с одной стороны, равно 17 – 1 = 16 часов, а с другой стороны – сумме $\frac{140}{x+3} + \frac{140}{x-3}$, тогда легко получим уравнение $\frac{140}{x+3} + \frac{140}{x-3} = 16$.

Этап 2. Предварительно разделим уравнение на 4: $\frac{35}{x+3} + \frac{35}{x-3} = 4$, а затем приведем дроби, входящие в него, к общему знаменателю, тогда $35(x-3) + 35(x+3) = 4(x^2 - 9)$ или $4x^2 - 70x - 36 = 0$. Корнями последнего уравнения будут числа 18 и –0,5; причем последнее не удовлетворяет условию $x > 3$.

Этап 3. Ответ задачи записывается следующим образом: скорость моторной лодки в неподвижной воде равна 18 км/ч.

Замечание. Как уже отмечалось, в примере 5, а также в примере 6 правильно обоснованное составление дробно-рационального уравнения с введенными ограничениями на переменную немного упрощает выкладки при применении алгоритма при решении таких уравнений, а также способствует верному отбору корней по условию задания.

Пример 7. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 4 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 20 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 11 км/ч меньше скорости второго.

Решение

Этап 1. Пусть длина круга равна S (км), а скорость первого бегуна – x (км/ч), тогда скорость второго – $x + 11$ (км/ч). В условии сказано, что по истечении 1 часа первый бегун пробежал расстояние $S - 4$ км, тогда как второй бегун (более быстрый) пробежал целый круг за $\frac{2}{3}$ часа (1 час за вычетом 20 минут составляет 40 минут, или 2/3 ч). Поэтому по условию задания приходим к системе:

$$\begin{cases} \frac{S-4}{x} = 1 \\ \frac{S}{x+11} = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Этап 2. Для решения системы выразим из первого уравнения длину круга $S = x + 4$, подставим во второе уравнение и далее по свойству пропорции для x получим $3 \cdot (x + 4) = 2 \cdot (x + 11)$, откуда $x = 10$, значит, $S = 14$.

Этап 3. Так как в задаче спрашивалась скорость первого бегуна, то для ответа на вопрос задачи достаточно было найти только неизвестное x, поэтому ответом будет, что скорость первого бегуна равна 10 км/ч; найденная длина круга показывает, что задача является корректной, хотя значение S можно было не находить.

Пример 8. Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 часов утра из города A в город B отправляется плот. В этот же момент времени из города B в город A отправляется катер, который встречается с плотом через 5 часов. Доплыв до города A, катер поворачивает обратно и приходит в город B одновременно с плотом. Успеют ли катер и плот прибыть в город B к 9 часам вечера того же дня?

Решение

Этап 1. Так как в этой задаче спрашивается о времени прибытия плота (или катера) и ничего не говорится о расстояниях между городами, то, чтобы не вводить дополнительное неизвестное, данное расстояние можно взять равным 1. Пусть скорость катера в неподвижной воде будет равна v (у.е./ч), а скорость течения реки – u (у.е./ч). Так как первая встреча катера с плотом прошла через 5 часов после начала движения, при этом катер шел против течения реки со скоростью $v - u$, а плот двигался по течению, то по условию задачи получим $\frac{1}{u + (v - u)} = 5$ или $\frac{1}{v} = 5$. Когда произошла вторая встреча, то плот преодолел расстояние между городами за $\frac{1}{u}$ ч, а катер, соответственно, проехав его дважды, сначала против течения реки за $\frac{1}{v - u}$ ч, а затем по течению за $\frac{1}{v + u}$ ч, отсюда получится еще одно уравнение: $\frac{1}{u} = \frac{1}{v - u} + \frac{1}{v + u}$.

Этап 2. Для ответа на вопрос задачи требуется найти скорость течения реки, поэтому, выразив из первого уравнения $v = 1/5$, подставим ее во второе уравнение, получим дробно-рациональное уравнение, содержащее только одно неизвестное, а именно: $\frac{1}{u} = \frac{1}{1/5\ - u} + \frac{1}{1/5 + u}$. Для нахождения решения уравнения применим соответствующий алгоритм:

1) найдем общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, $-u \cdot \left(\frac{1}{25} - u^2\right)$;
2) приведем к общему знаменателю дроби и приравняем числители дробей (сумм), т. е. $\frac{1}{25} - u^2 = u\left(\frac{1}{5} + u\right) + u\left(\frac{1}{5} - u\right)$, которое можно преобразовать в уравнение $u^2 + 0{,}4u - 0{,}04 = 0$. Корни этого квадратного уравнения равны $u_{1,2} = -0{,}2 \pm \sqrt{0{,}08}$;
3) проверка корней этого уравнения показывает, что они не являются нулями знаменателя, равными $\pm 1/5$.

Этап 3. Очевидно, что скорость течения реки не может быть отрицательной, поэтому $u = \sqrt{0{,}08} - 0{,}2$. Но для ответа необходимо вычислить время движения плота и сравнить его с 12. Так как

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\sqrt{0{,}08} - 0{,}2} = \frac{1}{\sqrt{0{,}08} - 0{,}2} \cdot \frac{\sqrt{0{,}08} + 0{,}2}{\sqrt{0{,}08} + 0{,}2} = \frac{\sqrt{0{,}08} + 0{,}2}{0{,}04} = 5 + \sqrt{50} > 12,$$

поэтому ответ на задачу будет «не успеют».

Рекомендации учителю: данный пример является примером задания повышенного уровня сложности, в котором кроме необходимых вычислений надо провести еще сравнительный анализ. Задачу можно решить, взяв расстояние между городами за S, тогда для ответа на вопрос задачи придется считать значение дроби $\frac{S}{u} = \frac{s/v}{u/v}$ и получать решение уравнения с отношением скоростей катера и плота, т. е. $\frac{u}{v}$.

Далее попробуйте решить задания и спроектировать совместную деятельность с обучающимися над задачей.

Задания для самостоятельного решения

Первые 160 км автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, следующие 100 км – со скоростью 50 км/ч, а последние 360 км – со скоростью 90 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Указание к решению: для решения задачи необходимо сначала найти полный путь, просуммировав все три указанных расстояния, затем найти время на каждом участке пути, после, поделив весь путь на полное время, найти среднюю скорость автомобиля.

1. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 93 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям по платформе со скоростью 3 км/ч, за 8 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Указание к решению: учесть, что при движении в одном направлении более скоростной объект догоняет другой со скоростью, равной их разности.

2. Два велосипедиста одновременно отправляются в 105-километровый пробег. Первый едет со скоростью, на 16 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Указание к решению: используя стандартные рассуждения, составить для решения задачи дробно-рациональное уравнение, решение которого провести по известному алгоритму.

3. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 70 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 24 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 14 часов после отплытия из него.

Указание к решению: взяв в качестве неизвестного x – скорость течения реки и учтя характер движения в движущейся среде, свести решение к нахождению корней дробно-рационального уравнения, дополнив условием с ограничением $0 < x < 24$.

4. На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходил круг на 2 минуты быстрее другого и через час обогнал его ровно на круг. За сколько минут проходил круг более медленный лыжник?

Указание к решению: взяв за неизвестное t – время, за которое проходит круг быстрейший лыжник, выразить количество кругов, пройденных за 60 минут каждым лыжником, и учесть, что разность по расстоянию между ними будет целый круг.

5. Скорость течения реки равна 3 км/ч, а расстояние между пунктами A и B, которые стоят на одном берегу реки, равно 28 км. Какова должна быть скорость лодки в неподвижной воде, чтобы на весь путь из A в B и обратно затратить не более 7 часов?

Указание к решению: по шаблону составляется дробно-рациональное неравенство, при решении которого учитывается, что скорость лодки не может быть меньше 3 км/ч.

Ответы

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
1	77,5 км/ч	4	4 км/ч
2	200 м	5	12 мин.
3	14 км/ч	6	не меньше 9 км/ч

2.2. Текстовые задачи на работу

Уравнения (системы уравнений) в текстовых задачах на работу содержат следующие величины: t – время выполнения работы, p – производительность (работа, производимая в единицу времени), A – работа, выполняемая за время t. В качестве работы может выступать объем жидкости, наливаемый в резервуар, количество деталей, изготавливаемых по заказу, и т. п. Эти три основные характеристики связаны соотношением: $A = p \cdot t$, которое подобно соотношению $S = v \cdot t$, используемому при решении задач на движение. Приведем примеры некоторых типичных заданий на работу и производительность.

Пример 1. Первый рабочий за час делает на 5 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 180 деталей, на 3 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Решение

<u>Этап 1</u>. Осмысление условия задачи и составление математической модели.

Описание деятельности. Обучающиеся читают условие задачи. Учитель организует обсуждение, задает вопросы. Например:

– О каком процессе говорится в задаче?

– Что дано по условию задачи (объем заказа, время заказа и т. п.)?

– Что является главным вопросом задачи?

Отвечая на вопросы, ученики учатся анализировать текст. Проговаривая условие задачи вслух – осмысливают содержание.

Варианты возможных ответов

- В задаче говорится о выполнении двумя рабочими работы по производству 180 деталей.
- Известно, что скорость изготовления деталей (производительности труда) для первого рабочего на 5 деталей больше, чем для второго рабочего, при этом время выполнения всего заказа у первого рабочего будет на 3 часа меньше.
- Требуется найти количество деталей, которые производит второй рабочий в единицу времени, т. е. за 1 час.

Далее педагог, используя вопросы, направляет учеников к пониманию, как связаны величины при производстве деталей. Например:

- Как связаны величины: производительность труда, время и объем работы?
- Какие неизвестные требуется ввести для ответа на вопрос задачи?
- Как найти время, которое понадобится каждому рабочему для выполнения всего заказа объемом в 180 деталей?

Обучающиеся отвечают на вопросы, вводят обозначение неизвестного и рассуждают. Например, если обозначить за x количество деталей, которое делает второй рабочий за час, то первый рабочий за час делает $x + 5$ деталей соответственно. При этом учителю важно отметить, что по условию производительность принимает положительное значение, т. е. $x > 0$. Далее учитель задает вопрос:

- Как найти время, затраченное каждым рабочим на изготовление заказа объемом в 180 деталей?

Ответом должно быть утверждение, что для вычисления времени необходимо работу разделить на производительность труда, тогда для первого рабочего это время будет равно $\frac{180}{x+5}$ ч, а для второго – $\frac{180}{x}$ ч. Наконец, учитель задает еще один вопрос:

- Как эти времена связаны друг с другом?

Учащиеся, отвечая, что одно из них на 3 часа меньше другого, приходят к составлению уравнения: $\frac{180}{x+5} = \frac{180}{x} - 3$.

Таким образом, ученики, проведя полный анализ текста, введя неизвестную величину, значение которой требуется найти для ответа на вопрос задачи, приходят к математической модели, приводящей к составлению дробно-рационального уравнения с одним неизвестным.

Далее педагог может организовать фронтальную, индивидуальную или групповую работу по нахождению решения полученного уравнения.

Этап 2. Работа с полученной математической моделью и анализ всех возможных способов решения.

Описание деятельности. Продолжая работу с задачей на данном этапе, учитель актуализирует правило (алгоритм) решения дробно-рационального уравнения. Возможные вопросы:

– Как найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение?
– Какие операции необходимо провести с дробями, чтобы можно было приравнять числители дробей (сумм), стоящих в правой и левой части уравнения?
– Что необходимо сделать после нахождения корней последнего уравнения?

Далее обучающиеся (работая самостоятельно или один из учеников работает у доски) преобразуют уравнение. Находят общий знаменатель: $x\,(x + 5)$. И приходят к уравнению при равенстве числителей: $180 \cdot x = 180 \cdot (x + 5) - 3x \cdot (x + 5)$.

В ходе преобразования этого уравнения (раскрытия скобок, приведения подобных и сокращения каждого слагаемого на 3) получаем квадратное уравнение $x^2 + 5x - 300 = 0$.

Корни последнего уравнения можно вычислить одним из возможных способов: либо по формуле корней через дискриминант $D = b^2 - 4ac$, либо использовать теорему Виета.

Ученики могут выбрать любой из предложенных вариантов, например, обучающийся, работающий у доски, решает применяя теорему Виета, остальные – самостоятельно по формуле корней. Получится:

$$D = 5^2 - 4 \cdot (-300) = 1225 = 35^2,\ x_{1,2} = \frac{-5 \pm 35}{2},\ x_1 = 15 \text{ и } x_2 = -20.$$

При этом учителю важно акцентировать внимание учеников на области существования решения данного уравнения. Например, задать вопрос: «Какие значения корни не могут принимать?». В данном случае корни уравнения должны удовлетворять области существования решения уравнения, а именно не являться нулями знаменателя: $x \neq 0$ и $x \neq -5$.

Итак, значения корней получены.

Учитель возвращает учеников к условию задачи и просит напомнить, что требовалось вычислить.

<u>Этап 3.</u> Ответ на вопрос задачи с проверкой найденного решения.

Описание деятельности. После получения числового значения учителю необходимо организовать обсуждение полученного ответа и проверку найденного решения. В данной задаче возможны следующие вопросы:

– Что требовалось вычислить? (Количество деталей в час, которое изготавливает второй рабочий.)
– Как записать ответ задачи?

Ученики возвращаются к тексту и отмечают, что в тексте задачи производительность не может принимать отрицательное значение, поэтому второй корень уравнения не подходит по смыслу, а окончательный ответ можно записать так: *15 деталей в час изготавливает второй рабочий*.

Рекомендации учителю: при составлении уравнения в этом и подобных заданиях ученикам следует вспомнить алгоритм решения дробно-рациональных уравнений, выполнить обязательную проверку области существования найденных корней и удовлетворения условию задачи.

Далее приводятся примеры заданий с решениями. Попробуйте спроектировать совместную деятельность с обучающимися над задачей с учетом рассмотренного выше примера.

Пример 2. Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 260 литров она заполняет на 6 минут быстрее, чем первая труба?

Решение

Этап 1. Пусть вторая труба пропускает x литров в минуту, тогда первая труба $x - 3$ (л/мин.), причем $x > 3$, т. к. производительность является величиной положительной. Как уже говорилось выше, задания на работу аналогичны задачам на движение, поэтому при составлении математической модели, приводящей к уравнению, применимы такие же приемы, в частности использование таблицы-шаблона, в нашем случае – табл. 4

Таблица 4

Шаблон для составления уравнения в примере 2

	Производительность, л/мин.	Время, мин.	Объем резервуара, л
Первая труба	$x - 3$	$\frac{260}{x-3}$	260
Вторая труба	x	$\frac{260}{x}$	260

С учетом условия задачи, что разность времени наполнения для первой трубы оказалась больше на 6 минут, получится уравнение $\frac{260}{x} = \frac{260}{x-3} - 6$.

Этап 2. Сократим все слагаемые уравнения на 2 и, приведя к общему знаменателю, для числителей дробей получаем уравнение:

$130x - 390 = 130x - 3(x^2 - 3x)$ или $x^2 - 3x - 130 = 0$. Решив это уравнение, получим $x = 13$ и $x = -10$.

Этап 3. Анализ корней квадратного уравнения показывает, что решением задачи является «13 литров в минуту пропускает вторая труба», т. к. отрицательное значение производительность не может принимать по смыслу задания.

Пример 3. Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь – за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем? Ответ дайте в минутах.

Решение

Этап 1. Если речь идет о выполнении некоторой работы, не охарактеризованной в количественном плане (т. е. сколько деталей необходимо сделать, сколько кубометров земли вынуть и т. д.), то объем всей работы считают равным 1, а производительность представляет долю всей работы, производимую за единицу времени (час, день и т. п.). Пусть x, y, z – часть работы по покраске забора, выполняемой за 1 час Игорем, Пашей и Володей соответственно. Тогда при работе вместе Игорь и Паша за 1 час покрасят $x + y$ – частей, а за 14 часов – весь забор, или легко получим равенство $14 \cdot (x + y) = 1$. Аналогично рассуждая, получаем еще 2 уравнения: при совместной работе Паши и Володи – $15 \cdot (y + z) = 1$ и Игоря и Володи – $30 \cdot (x + z) = 1$. Таким образом, получится система уравнений:

$$\begin{cases} 14(x+y)=1 \\ 15(y+z)=1 \\ 30(x+z)=1 \end{cases}$$

Этап 2. Как система из трех линейных уравнений с тремя неизвестными она имеет одно решение относительно неизвестных, однако заметим, что для ответа на вопрос задачи нам необязательно находить каждое неизвестное, а будет достаточно найти их сумму $x + y + z$, т. к. ответом на вопрос будет число, равное $\frac{1}{x+y+z}$. Поэтому, поделив уравнения системы первое на 14, второе на 15 и третье на 30 и сложив их вместе между собой, получим, с одной стороны, удвоенную сумму $x+y+z$, а с другой стороны – некое число, т. е.

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y+z=\frac{1}{15} \\ x+z=\frac{1}{30} \end{cases}, \text{откуда } 2\cdot(x+y+z)=\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{15+14+7}{210}=\frac{36}{210}=\frac{6}{35}.$$

Тогда $x + y + z = \frac{3}{35}$.

Этап 3. В силу условия задачи имеем $\frac{1}{x+y+z} = \frac{35}{3}$ ч, для перевода времени в минуты помножим на 60 и получим, что для совместной работы по покраске забора Игорем, Пашей и Володей необходимо 700 минут.

Замечание. Решение системы уравнений с вычислением неизвестных x, y, z по отдельности также приводит к правильному ответу, однако времени для решения будет затрачено значительно больше, так как придется выполнить трудные вычисления с обыкновенными дробями.

Пример 4. Двое рабочих выполнили работу за 10 дней, причем 2 дня первый из них не работал. За сколько дней первый рабочий выполнил бы всю работу, если известно, что за первые 7 дней они вместе выполнили 80 % всей работы?

Решение

Этап 1. Пусть x, y – производительности первого и второго рабочего соответственно, а объем всей работы равен 1. Для ответа на вопрос задачи требуется найти $\frac{1}{x}$ – искомое количество дней. Однако в условии задачи имеется неопределенность, касающаяся работы за первые 7 дней, в которой возможны 3 варианта по количеству дней для первого рабочего, когда он, возможно, брал 1 или 2 дня отдыха. При составлении математической модели придется учитывать: 1-й вариант – первый рабочий работал только 5 дней, когда они вместе сделали 80 % всей работы; 2-й вариант – первый рабочий работал только 6 дней и, наконец, 3-й вариант – первый рабочий работал все 7 дней при выполнении 80 % работы, тогда, соответственно, он 2 дня отдыхал в последние 3 дня. Для каждого из вариантов получим системы уравнений, в которых будет одно совпадающее уравнение, получаемое по условию, что за 10 дней выполнена вся работа, т. е. $8 \cdot x + 10 \cdot y = 1$. Вторые уравнения в системах будут:

1-й вариант – $5 \cdot x + 7 \cdot y = 0{,}8$;

2-й вариант – $6 \cdot x + 7 \cdot y = 0{,}8$;

3-й вариант – $7 \cdot x + 7 \cdot y = 0{,}8$.

Этап 2. Получим решение каждой системы в отдельности.

1. $\begin{cases} 8x + 10y = 1 \\ 5x + 7y = 0{,}8 \end{cases}$. Домножив первое уравнение на 7, а второе уравнение на 10, вычтем из нового первого соответственно второе, тогда $56 \cdot x + 70 \cdot y - (50 \cdot x + 70 \cdot y) = 7 - 8$ или $6 \cdot x = -1$, что не реализуется, т. к. производительность положительная.

2. $\begin{cases} 8x + 10y = 1 \\ 6x + 7y = 0{,}8 \end{cases}$. Повторим те же действия, что в первом варианте, тогда получим $56 \cdot x + 70 \cdot y - (60 \cdot x + 70 \cdot y) = 7 - 8$ или $-4 \cdot x = -1$, откуда $x = \frac{1}{4}$.

3. $\begin{cases} 8x + 10y = 1 \\ 7x + 7y = 0{,}8 \end{cases}$. Еще раз повторим такое же преобразование, получим: $56 \cdot x + 70 \cdot y - (70 \cdot x + 70 \cdot y) = 7 - 8$ или $-14 \cdot x = -1$, откуда $x = \frac{1}{14}$.

Этап 3. Проанализируем решение, полученное во втором варианте, если $x = \frac{1}{4}$, тогда $\frac{1}{x} = 4$, т. е. получается, что первый рабочий может выполнить всю работу за 4 дня, тогда как вместе – за 10 дней, что противоречит смыслу задания. Кстати, если найденное значение подставить в уравнение $8 \cdot x + 10 \cdot y = 1$, тогда для производительности второго рабочего получится отрицательное значение, что также противоречит условию задачи. Значит, остается только один возможный вариант, когда $x = \frac{1}{14}$, соответственно, время выполнения всей работы будет равно 14 дням, при этом проверка знака производительности второго рабочего также выполняется, т. к. $8 \cdot \frac{1}{14} + 10 \cdot y = 1$, откуда $y = \frac{3}{70}$.

Рекомендации учителю: данное задание с неопределенным условием способствует лучшему усвоению понимания сути задания, в конечном счете развивает у обучающихся математическую грамотность, включая в первую очередь развитие смыслового чтения.

Далее попробуйте решить задания и спроектировать совместную деятельность с обучающимися над задачей.

Задания для самостоятельного решения

1. Первый рабочий за час делает на 6 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 140 деталей, на 3 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Указание к решению: решение сводится к составлению дробно-рационального уравнения $\frac{140}{x+6} = \frac{140}{x} - 3$, которое решается стандартными методами.

2. Первая труба пропускает на 13 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 208 литров она заполняет на 8 минут быстрее, чем первая труба?

Указание к решению: при составлении математической модели получится уравнение $\frac{208}{x-13} = \frac{208}{x} - 8$.

3. Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за 12 часов. Если бы сначала первый выполнил половину этой работы, а затем другой – остальную часть, то вся работа была бы выполнена за 25 часов. За какое время мог выполнить эту работу каждый рабочий в отдельности?

Указание к решению: решение сводится к составлению системы уравнений с тремя неизвестными x, y – производительность каждого рабочего соответственно и t – времени в часах, когда первый рабочий делал половину всей работы (объем работы можно взять равным 1).

4. При постройке здания требовалось вынуть 8000 м^3 земли в определенный срок. Работа была закончена раньше срока вследствие того, что бригада землекопов ежедневно перевыполняла план на 50 м^3. Определите, в какой срок должна была быть окончена работа.

Указание к решению: если в качестве неизвестного t взять время работы по плану, то в математической модели получится уравнение $\frac{8000}{t-8} - \frac{8000}{t} = 50$.

Ответы

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
1	14 дет/ч.	3	20 и 30 часов
2	13 л/мин.	4	40 дней

2.3. Текстовые задачи на смеси и процентное содержание

Решение задач на концентрацию, процентное содержание веществ в смеси основано на использовании нескольких понятий и формул.

1. *Массовая концентрация вещества в смеси* определяется отношением массы данной компоненты к полной массе смеси и показывает, какую долю полной массы смеси составляет это вещество – $c_i = \frac{m_i}{m}$, i = 1, 2, …, $c_1 + c_2 + \ldots = 1$.
2. Процентным содержанием вещества в смеси называется величина $p_i = c_i \cdot 100$ %, i = 1, 2, …, $p_1 + p_2 + \ldots = 100$ %.
3. *Объемная концентрация вещества в смеси* определяется отношением объема, занимаемого данной компонентой, к полному объему смеси и также показывает, какую долю полного объема смеси составляет объем данной компоненты – $c_i = \frac{V_i}{V}$, i = 1, 2, …, $V_1 + V_2 + \ldots = 1$, при этом для объемного процентного содержания формулы остаются те же, что и п. 2.

Рассмотрим решение заданий по данной тематике, которые бывают в контрольно-измерительных материалах ГИА или в различных диагностических работах.

Пример 1. Свежие фрукты содержат 72 % воды, а высушенные – 26 %. Сколько сухих фруктов получится из 222 кг свежих фруктов?

Решение

Этап 1. Осмысление условия задачи и составление математической модели.

Описание деятельности. Обучающиеся читают условие задачи. Чтобы ученики перешли к анализу текста, учитель задает вопросы. Например:

– Что входит в состав свежих и сухих фруктов?
– Что происходит с фруктами, когда они превращаются из свежих в сухие?
– Что является главным вопросом задачи?

Отвечая на поставленные вопросы, ученики начинают рассуждать. Возможные варианты ответов.

– Любые фрукты содержат некое питательное вещество, которое впоследствии можно именовать «фруктозой», и воду, причем количество воды в свежих фруктах больше, чем в сухих.
– В процессе, который именуется «сушкой», количество воды в свежих фруктах уменьшается за счет испарения, однако при этом сохраняется неизменным количество «фруктозы».
– Какая будет новая масса фруктов после испарения части воды, т. е. когда из свежих фруктов массой 222 кг получатся сухие?

Задавая вопросы, педагог подводит учеников к осмыслению того, как, зная процентное содержание воды в смеси, можно узнать массу питательного вещества. Рассуждая, обучающие, например, могут предположить: если в свежих фруктах процент воды составляет 74 %, то на долю «фруктозы» приходится 100 % – 72 % = 28 %. Так как было 222 кг свежих фруктов, то массу питательного вещества можно найти по формуле $222 \cdot \frac{28\,\%}{100\,\%} = 0{,}28 \cdot 222$ кг.

Далее педагог может спросить:

– Как найти массу «фруктозы» в сухих фруктах?

Вариант рассуждения учеников:

– Для этого нужно знать массу сухих фруктов, что и является главным вопросом задачи.

Тогда можно ввести неизвестное x (кг) – массу сухих фруктов, и по условию вода в них составляет 26 %, значит, процентное содержание питательного вещества будет равно 100 % – 26 % = 74 %, после этого обучающиеся могут сделать вывод, что масса «фруктозы» в кг должна составить $x \cdot \frac{74\,\%}{100\,\%} = 0{,}74 \cdot x$.

Наконец, учитель задает еще один вопрос:

– Что делать с полученными произведениями? Как они связаны?

Ученики, сопоставляя произведения, ссылаясь на известные законы, в частности из предмета «Химия», должны ответить, что данные произведения равны по закону сохранения масс, откуда и получится искомое уравнение:

$$0{,}74 \cdot x = 0{,}28 \cdot 222.$$

Если обучающиеся сразу не могут сделать вывод, педагогу надо выстроить цепочку дополнительных вопросов, чтобы подвести их к равенству полученных произведений.

Таким образом, ученики, проведя анализ текста, введя неизвестную величину, значение которой и требуется найти для ответа на вопрос задачи, приходят к математической модели в виде линейного уравнения с одним неизвестным.

Этап 2. Работа с полученной математической моделью и анализ всех возможных способов решения.

Описание деятельности. Учитель напоминает алгоритм решения простого линейного уравнения, в частности для нахождения неизвестного x выполняется преобразование: $x = \frac{0{,}28 \cdot 222}{0{,}74} = \frac{62{,}16}{0{,}74} = 84$. Можно в данном примере показать более простое арифметическое действие, заметив, что $222 = 3 \cdot 74$, тогда для вычисления x получится $x = \frac{0{,}28 \cdot 222}{0{,}74} = \frac{0{,}28 \cdot 3}{0{,}01} = 28 \cdot 3 = 84$. Важно отметить, чтобы обучающиеся самостоятельно приходили к верному значению корня данного уравнения.

Этап 3. Ответ на вопрос задачи с проверкой найденного решения.

Описание деятельности. Для анализа полученного решения учителю необходимо организовать обсуждение и проверку найденного значения. В данной задаче возможны следующие вопросы:

- Как записать правильный ответ?
- Каков физический смысл полученного значения?
- Как соотносятся масса свежих и сухих фруктов?
- В каких единицах по условию задачи измеряется масса сухих фруктов?

Ученики, возвращаясь к тексту, отмечают, что вопросом задачи была масса сухих фруктов, единицы измерения – кг. Рассуждая, ученики высказываются, что в силу процесса усыхания масса смеси должна уменьшиться, поэтому полученное значение должно быть хотя бы немного меньше исходной массы свежих фруктов. Таким образом, получаем ответ задачи: масса сухих фруктов, полученных при сушке, будет равна 84 кг.

Рекомендации учителю: при решении этой задачи следует обучающимся напомнить, что все действия можно провести, используя понятие концентрации вещества в смеси, переведя проценты в доли от целого.

Далее приводятся примеры заданий с решениями. Попробуйте спроектировать совместную деятельность с обучающимися над задачей с учетом рассмотренного выше примера.

Пример 2. Имеются 2 сосуда, содержащие 4 кг и 16 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 57 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 60 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

Решение

Этап 1. Пусть концентрация кислоты в первом растворе равна x, а во втором – y, тогда концентрация воды будет $1 - x$ и $1 - y$ соответственно. Тогда, если мы сливаем 2 раствора, один массой 4 кг, а другой массой 16 кг, то согласно формулам, представленным выше, получим в новом растворе «чистую» кислоту $4 \cdot x + 16 \cdot y$ кг. Но так как по условию получается раствор 57 % кислоты, т. е. в этом растворе кислота будет массой $\frac{57\,\%}{100\,\%} \cdot (4 + 16) = 0{,}57 \cdot 20$. Тогда приходим к уравнению $4 \cdot x + 16 \cdot y = 0{,}57 \cdot 20$. Аналогично рассуждая, легко получить второе уравнение для нового второго раствора с процентным содержанием кислоты в нем в 60 %, а именно $1 \cdot x + 1 \cdot y = 0{,}60 \cdot (1 + 1)$ (в этом растворе массы исходных растворов берутся равными по 1 кг). Таким образом, получим систему уравнений: $\begin{cases} 4 \cdot x + 16 \cdot y = 0{,}57 \cdot 20 \\ x + y = 0{,}6 \cdot 2 \end{cases}$.

Этап 2. Для решения системы применим метод подстановки, выразив из второго уравнения $y = 1{,}2 - x$, и подставим в первое, тогда $4 \cdot x + 16 \cdot (1{,}2 - x) = 11{,}4$, откуда $-12 \cdot x = -7{,}8$, значит, $x = 0{,}65$. Значение y равно $1{,}2 - 0{,}65 = 0{,}55$.

Этап 3. В задании спрашивается, сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе, поэтому необходимо полученную концентрацию в первом растворе (0,65) умножить на массу (4 кг), тогда получится $0{,}65 \cdot 4 = 2{,}6$ кг и есть масса «чистой» кислоты в этом растворе.

Замечание. При решении системы уравнений можно было ограничиться только вычислением значения x, так как спрашивалась только масса кислоты в первом растворе, проверив, чтобы полученное число не превосходило 1.

Рекомендация учителю: если в обосновании уравнений у обучающихся возникают проблемы, то для наглядности составления математической модели возможно использование таблицы-шаблона, наподобие того, как это было в предыдущих текстовых задачах; в варианте данного задания таблица будет следующая (см. табл. 5).

Таблица 5

Шаблон для составления системы уравнений в примере 2

	Концентрация кислоты	Концентрация воды	Масса, кг
1-й раствор	x	1 – x	4
2-й раствор	y	1 – y	16
Новый 1-й раствор	0,57	0,43	4 + 16 = 20
Новый 2-й раствор	0,60	0,40	1 + 1 = 2

Пример 3. Имеется 2 сплава. Первый содержит 10 % никеля, второй – 35 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 175 кг, содержащий 25 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Решение

Этап 1. Пусть x кг – масса первого сплава, тогда $175 - x$ кг – масса второго сплава. Для составления уравнения воспользуемся таблицей-шаблоном (табл. 6).

Таблица 6

Шаблон для составления уравнения в примере 3

	Процентное содержание никеля	Процентное содержание примеси	Масса, кг
1-й сплав	10	100 – 10 = 90	x
2-й сплав	35	100 – 35 = 65	$175 - x$
Новый сплав	25	100 – 25 = 75	175

Так как масса никеля в новом сплаве равна $\frac{25\ \%}{100\ \%} \cdot 175 = 43{,}75$ кг и складывается из масс никеля в первом $\frac{10\ \%}{100\ \%} \cdot x$ кг и втором сплавах $\frac{35\ \%}{100\ \%} \cdot (175 - x)$ кг, то получим уравнение $0{,}1 \cdot x + 0{,}35 \cdot (175 - x) = 43{,}75$.

Этап 2. Преобразуя уравнение и делая необходимые вычисления, получим, что $-0{,}25 \cdot x = -17{,}5$, откуда $x = 70$.

Этап 3. Так как вопрос задачи был о сравнении масс первоначальных сплавов, то по условию имеем: масса первого сплава равна 70 кг, второго соответственно равна 175 – 70 = 105 кг, значит, масса первого сплава меньше массы второго на 35 кг.

Пример 4. 2 куска сплава меди с цинком с разной концентрацией меди весом 3 и 4 кг распилили на 2 неравных куска каждый и из них сделали 2 новых сплава с одинаковой концентрацией меди. На какие (по массе) части был распилен 3-килограммовый кусок сплава?

Решение

Этап 1. Пусть x кг – масса первой части распиленного куска весом 3 кг, тогда $3 - x$ кг будет масса второй (оставшейся) части этого куска сплава; аналогично y кг – масса первой части распиленного куска весом 4 кг и $4 - y$ кг – второй части этого же куска. Допустим, что сплавили обе первые части кусков, которые образуют новый сплав массой 2 кг, тогда получим, что $x + y = 2$, остальные куски, сплавленные вместе, образуют сплав массой 5 кг. Пусть концентрация меди в первоначальных сплавах массой 3 и 4 кг была равна p и q соответственно, причем $p \neq q$. Выведем концентрацию меди в двух новых сплавах: для сплава массой 2 кг она будет равна $\frac{p \cdot x + q \cdot y}{2}$, для сплава массой 5 кг с $\frac{p \cdot (3 - x) + q \cdot (4 - y)}{5}$. Так как по условию эти концентрации равны, то запишем соотношение $\frac{p \cdot x + q \cdot y}{2} = \frac{p \cdot (3 - x) + q \cdot (4 - y)}{5}$. В результате получится система уравнений, содержащая 4 неизвестные: $\begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{p \cdot x + q \cdot y}{2} = \frac{p \cdot (3 - x) + q \cdot (4 - y)}{5} \end{cases}$.

Этап 2. Применим метод подстановки, выразив y как $y = 2 - x$, и подставим во второе уравнение системы, тогда $\frac{p \cdot x + q \cdot (2 - x)}{2} = \frac{p \cdot (3 - x) + q \cdot (4 - 2 + x)}{5}$ или

$5 \cdot p \cdot x + 10 \cdot q - 5 \cdot q \cdot x = 6 \cdot p - 2 \cdot p \cdot x + 4 \cdot q + 2 \cdot q \cdot x$, что равносильно уравнению

$7 \cdot p \cdot x - 7 \cdot q \cdot x = 6 \cdot p - 6 \cdot q$, откуда $x = \frac{6 \cdot (p - q)}{7(p - q)} = \frac{6}{7}$, заметим, что по условию $p \neq q$.

Этап 3. Для ответа на вопрос задачи требуется найти еще массу второй части куска первого сплава, т. е. $3 - \frac{6}{7} = 2\frac{1}{7}$ кг, таким образом, массы частей распиленного первого сплава равны $\frac{6}{7}$ и $\frac{15}{7}$ кг.

Замечание. Приведенный пример задачи показывает, что иногда при составлении математической модели приходится вводить количество неизвестных больше, чем возможное количество уравнений в системах, при этом задание имеет однозначное решение, т. е. является корректным.

Далее попробуйте решить задания и спроектировать совместную деятельность с обучающимися над задачей.

Задания для самостоятельного решения

1. Свежие фрукты содержат 86 % воды, а высушенные – 18 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 35 кг высушенных фруктов?

Указание к решению: задание можно решить, составив пропорцию: $\frac{35}{x} = \frac{0,14}{0,82}$, где x – масса свежих фруктов.

2. Имеются 2 сосуда, содержащие 30 кг и 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 81 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 83 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

Указание к решению: заполнив таблицу-шаблон, свести задачу к решению системы уравнений $\begin{cases} 30x + 20y = 40,5 \\ x + y = 1,66 \end{cases}$.

3. В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

Указание к решению: при составлении соотношения необходимо учесть, что объем кислоты не меняется при добавлении воды.

4. Имеется 2 сплава. Первый сплав содержит 45 % меди, второй – 20 % меди. Масса первого сплава больше массы второго на 30 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 40 % меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Указание к решению: взяв в качестве неизвестного x кг массу второго сплава, получим уравнение $0,2 \cdot x + 0,45 \cdot (x + 30) = 0,4 \cdot (2x + 30)$, решив которое находим ответ на вопрос задачи.

Ответы

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
1	205 кг	3	16 %
2	18,6 кг	4	50 кг

2.4. Текстовые задачи с целочисленным решением

Некоторые текстовые задачи, решение которых сводится к составлению уравнений и неравенств, содержат неизвестные, принимающие только целые значения. Решения таких заданий в целых числах имеют свои особенности, в частности, решение может не существовать или может быть не единственным. Поэтому требуется строгое обоснование единственности получаемого решения.

Такие задачи можно решать с помощью перебора вариантов значений переменных, сводя к преобразованиям, которые значительно уменьшают объем перебора до приемлемых величин, обычно к 1–3 вариантам. Рассмотрим некоторые задания, относящиеся к задачам такого типа.

Пример 1. В шести аквариумах было поровну рыбок. Установили еще 5 аквариумов, и рыбок расселили так, чтобы во всех аквариумах, кроме одного, их стало поровну, а в одном – на 1 больше, чем в каждом из остальных. Сколько всего было рыбок, если их было больше 20, но меньше 100?

Решение

Этап 1. Осмысление условия задачи и составление математической модели.

Описание деятельности. Обучающиеся читают условие задачи. Учитель, используя вопросы, организует обсуждение, анализ текста. Например:

– О чем говорится в задаче?
– Что известно (ученики в тексте выделяют фактографические данные)?
– Что нужно найти (главный вопрос задачи)?

Приведем возможные варианты ответов учеников.

– Речь идет о некотором количестве рыбок, размещенных в аквариумах.
– Известно, что сначала было 6 аквариумов с одинаковым количеством рыбок в каждом, потом их стало на 5 больше, причем в одном из них рыбок стало на одну больше, чем в остальных.
– Сколько рыбок было, если их количество больше 20, но меньше 100?

При обсуждении вопросов обучающиеся вместе с педагогом могут прийти к выводу, что если изначально было 6 аквариумов, в каждом из которых равное количество рыбок, то это количество должно делиться на 6 без остатка и при этом удовлетворять неравенству $20 < N < 100$, где N – количество рыбок.

Далее обучающиеся самостоятельно или работая в группе записывают ряд чисел, кратных 6 и входящих в промежуток от 20 до 100, т. е. это 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96.

На следующем шаге педагог может задать вопрос:

– Мы можем сделать вывод и перейти к ответу?

На что внимательные ученики должны заметить: а как же быть с условием, «когда добавили 5 аквариумов, т. е. их уже стало $6 + 5 = 11$, и разместили тех же рыбок в них, то в одном из аквариумов рыбок стало ровно на одну больше, чем в остальных? Например, число 24 при делении на 11 дает в остатке 2, что означает – в 10 аквариумах стало по 2 рыбки и в 11-м их будет 4, а по условию должно быть ровно 3. Поэтому педагогу важно подвести учеников к осознанию, что для правильного ответа необходимо выбрать число, которое при делении на 11 дает в остатке 1. Тогда обучающиеся приходят к выводу, что ответ задачи можно получить, перебрав все числа из представленного ряда.

Этап 2. Работа с полученной математической моделью и анализ всех возможных способов решения.

Описание деятельности. На данном этапе необходимо провести перебор чисел из ряда 24, 30 и т. д. до 96 по проверке деления на число 11 с остатком. Можно организовать работу по группам или индивидуально и обсудить вместе полученные результаты.

Итак, необходимо провести следующие вычисления:

– 30: при делении на 11 получится 2 и в остатке 8;
– 36: при делении на 11 получится 3 и в остатке 3;
– 42: при делении на 11 получится 3 и в остатке 9;
– 48: при делении на 11 получится 4 и в остатке 4;
– 54: при делении на 11 получится 4 и в остатке 10;
– 60: при делении на 11 получится 5 и в остатке 5;
– 66: при делении на 11 получится 6 и в остатке 0;
– 72: при делении на 11 получится 6 и в остатке 6;
– 78: при делении на 11 получится 7 и в остатке 1;
– 84: при делении на 11 получится 7 и в остатке 7;
– 90: при делении на 11 получится 8 и в остатке 2;
– 96: при делении на 11 получится 8 и в остатке 8.

В процессе обсуждения важно показать, что перебор вариантов в данной задаче должен быть полным, что решение содержит только одно число.

Этап 3. Ответ на вопрос задачи с проверкой найденного решения.

Описание деятельности. После проведения всех вычислений педагог направляет учеников к условию задачи, чтобы они еще раз прочли, что нужно найти. Соотнося вопрос задачи и полученные результаты, обучающиеся самостоятельно выбирают правильный ответ.

Ответ. Всего было 78 рыбок, поскольку после добавления пяти аквариумов в 10 аквариумах стало по 7 рыбок, а в 11-м – ровно 8, что на одну больше, чем в других.

Рекомендации учителю. Особенность данного примера заключается в том, чтобы направить учеников к рассмотрению альтернативного решения. Провести вычисления, поменяв порядок условий задачи: сначала составить ряд чисел, которые больше 20 и меньше 100, но при делении на 11 дают остаток 1. Набор таких чисел будет значительно меньше: 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89; т. е. всего 7 чисел вместо тринадцати для первого набора. Тогда для проверки основного условия задания достаточно выбрать число, кратное 6, проверить какие из этих чисел делятся на 6 без остатка. Учителю можно задать вопросы:

– Как определить, что число кратно 6?
– Как определить, что число является четным?

Вспомнить с учениками признаки делимости на 2 (число четное) и на 3 (сумма цифр числа кратна 3). Это значительно упрощает арифметические вычисления.

Далее приводятся примеры заданий с решениями. Попробуйте спроектировать совместную деятельность с обучающимися над задачей с учетом рассмотренного выше примера.

Пример 2. Задумано двузначное число, которое делится на 9. К нему справа приписали это же число еще раз. Оказалось, что получившееся четырехзначное число делится на 11. Какое число задумано?

Решение

Этап 1. Пусть x – задуманное двузначное число – имеет вид: $x = 10 \cdot a + b = \overline{ab}$, где a и b – цифры десятков и единиц соответственно. Если справа приписать еще число, записанное этими же цифрами, то получим:

$$\overline{abab} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot a + b = 101 \cdot (10 \cdot a + b) = 101 \cdot x.$$

Этап 2. По условию задачи число $101 \cdot x$ делится на 11, но так как 101 при делении на 11 дает остаток 2, то означает, что число кратно 11, кроме того, это число делится на 9 без остатка, поэтому мы можем получить вариант 99.

Этап 3. 99 является единственным вариантом такого числа, т. к. по условию было задумано двузначное число, а 99 – это максимальное из возможных и других вариантов нет.

Пример 3. Около дома посажены липы и березы, причем их общее количество более 14. Если увеличить вдвое количество лип, а количество берез увеличить на 18, то берез станет больше, чем лип. Если увеличить вдвое количество берез, не изменяя количество лип, то лип будет всё равно больше, чем берез. Сколько лип и берез было посажено?

Решение

Этап 1. Пусть x и y – количество лип и берез соответственно, тогда по первому условию имеем неравенство $x + y > 14$. Для второго условия получится $2 \cdot x < y + 18$, а из третьего – $x > 2 \cdot y$. Таким образом, составим систему трех линейных неравенств: $\begin{cases} x + y > 14 \\ 2 \cdot x < y + 18. \\ x > 2 \cdot y \end{cases}$

Этап 2. Если первое неравенство системы умножить на –2 и получившееся неравенство $-2 \cdot x - 2 \cdot y < -28$ сложить со вторым неравенством, то получим $-2 \cdot y < y - 10$, откуда имеем $y > \frac{10}{3}$.

Аналогично третье неравенство также умножаем на –2 и снова сложим со вторым, тогда $0 < 18 - 3y$ или $y < 6$. Поскольку y – целое, то y может принимать лишь два значения: 4 или 5.

Подставим $y = 4$ в систему неравенств, тогда $\begin{cases} x > 10 \\ 2 \cdot x < 22 \\ x > 8 \end{cases}$ не имеет относительно x целых решений ($10 < x < 11$). При $y = 5$ получим $\begin{cases} x > 9 \\ 2 \cdot x < 23, \\ x > 10 \end{cases}$ откуда $10 < x < 11{,}5$; следовательно, единственное целое решение $x = 11$.

Этап 3. Система неравенств решалась с помощью свойства числовых неравенств, когда при одинаковых знаках неравенства можно складывать, поэтому получившееся решение единственно, а именно было посажено 11 лип и 5 берез.

Замечание. Задачу можно решить графическим методом, изобразив на координатной плоскости область, удовлетворяющую неравенствам, и показать, что внутри области лежит только одна точка с целочисленными координатами.

Пример 4. Мастер делает за 1 час целое число деталей, большее, чем 16, а ученик – на 4 детали меньше. Мастер в одиночку выполняет заказ за целое число часов, а 2 ученика вместе – на 2 часа быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

Решение

Этап 1. Пусть из N деталей состоит заказ, x (деталей/час) – производительность мастера ($x > 16$), $x - 4$ (деталей/час) – производительность ученика. Тогда по условию $\frac{N}{x} = k$ – целое число часов (время выполнения заказа мастером) и $\frac{N}{2 \cdot (x-4)} = k - 2$ – время выполнения заказа двумя учениками вместе. Тогда получим уравнение, связывающее 2 целочисленных неизвестных: $\frac{N}{2 \cdot (x-4)} = \frac{N}{x} - 2$.

Этап 2. Преобразуем уравнение следующим образом: $N \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2(x-4)}\right) = 2$ или $N \cdot \frac{x-8}{2 \cdot x \cdot (x-4)} = 2$. Тогда имеем $N = \frac{4 \cdot x^2 - 16 \cdot x}{x-8}$. Правую часть последнего равенства можно записать, если выделить целую часть дроби: $N = 4 \cdot x + 16 + \frac{128}{x-8}$.

Так как по условию N и x – целые, тогда $x - 8$ также целое и является делителем числа 128, причем больше 8 ($x > 16$), чтобы дробь $\frac{128}{x-8}$ также принимала целочисленное значение.

Число 128 имеет делители больше 8: 16, 32, 64 и 128. Для каждого из них получим: $x_1 = 24$, $x_2 = 40$, $x_3 = 72$, $x_4 = 132$.

Тогда для найденных производительностей объем заказа получится: $N_1 = 120$, $N_2 = 160$, $N_3 = 306$, $N_4 = 545$.

Этап 3. Однако заметим, что числа x и $2 \cdot (x - 4)$ должны быть делителями N, поэтому проверим полученные на предыдущем этапе значения: число 120 делится нацело на 24 и 40 при $x = 24$; при этом число 160 делится на 40, но не делится на 72; аналогично 306 не делится на 72 и 545 также не делится на 132. Таким образом, заказ состоит из 120 деталей, причем мастер его выполнит за 5 часов, а 2 ученика вместе – за 3 часа.

Далее попробуйте решить задания и спроектировать совместную деятельность с обучающимися над задачей.

Задания для самостоятельного решения

1. Во время викторины учащиеся класса разбились на команды, в каждой по 5 человек. А после викторины они вернулись в свой кабинет, где стоит 15 двухместных парт. Когда учащиеся сели за парты, полностью занятыми оказалось 9 парт, а каждую из остальных либо занял только один человек, либо парта осталась свободной. Сколько осталось свободных парт?

Указание к решению. Использовать ограничения, что в классе не меньше 18 человек, т. к. 9 парт оказались занятыми полностью, но и не более 30 человек; из чисел, кратных 5, этому условию удовлетворяют 20, 25 и 30, и перебором показать, что возможен только класс из 20 учащихся.

2. Сумма цифр двузначного числа равна 10. Квадрат этого числа больше 600, но меньше 800. Найдите это число.

Указание к решению. В силу того, что $\sqrt{600} > 24$, а $\sqrt{800} < 29$, то простой перебор из вариантов 25, 26, 27 и 28 даст правильный ответ.

3. Садовод посадил плодовые кустарники и деревья, причем их общее число больше 8. Если увеличить число кустов вдвое, а число деревьев – на 12, то деревьев станет больше, чем кустов. Если число деревьев удвоить, не изменяя числа кустов, то кустов будет больше, чем деревьев. Сколько кустов и деревьев было посажено?

Указание к решению. Если взять за x и y – число кустов и деревьев соответственно, то полученную систему неравенств можно решить графически, при этом область, которая задается этими неравенствами, содержит единственную точку с целочисленными координатами.

4. На товарищеском турнире школьников по шахматам каждый школьник сыграл с каждым другим не более одной партии, кроме того, каждый из них сыграл с приглашенным гроссмейстером не более одной партии. Всего было сыграно 42 партии. Какое наименьшее количество школьников могло участвовать в этом турнире?

Указание к решению. Если взять за x – количество школьников, то по условию задачи получится неравенство $x + \frac{x \cdot (x-1)}{2} > 42$, тогда для ответа необходимо найти его наименьшее целочисленное решение.

Ответы

№ задачи	Ответ	№ задачи	Ответ
1	4	3	7 кустов и 3 дерева
2	28	4	9 школьников

Заключение

Решение текстовых задач не случайно всегда волновало учителей, методистов, да и самих учащихся и их родителей.

Во-первых, нельзя решить задачу, не поняв ее содержание. Следовательно, умение решать текстовые задачи свидетельствует об одной из самых важных способностей человека – способности понимать текст. Правы те учителя, которые добиваются понимания текста не только на уроках чтения, но и на уроках математики.

Критерием понимания задачи является факт ее решения. В процессе решения задач ученики учатся применять знания, отрабатывать навыки и получать опыт применения знаний. Поэтому решение текстовых задач – это деятельность, весьма важная для общего развития. В процессе решения задачи наблюдается активизация мыслительной деятельности обучающихся, развиваются активность, наблюдательность, находчивость, сообразительность, смекалка, абстрактное мышление, умение применять теорию к решению конкретных задач. В целом степень математического развития определяется умением решать текстовые задачи. Именно поэтому более трудная часть в контрольных работах, ВПР и ГИА по математике содержит текстовые задачи.

В данных методических рекомендациях анализируются затруднения обучающихся на этапах работы с текстовой задачей. Учителю предлагаются примерные вопросы и приемы для организации деятельности обучающихся на каждом этапе решения задачи. Приводятся примеры решения текстовых задач с подробным описанием деятельности учителя. Рассматривается решение текстовых задач на движение (несколько видов), на работу (три типа), на смеси (три типа) и задач с целочисленными решениями арифметическим и алгебраическим методами.

Текстовые задачи по математике являются очень хорошим образцом связи теории с практикой и применения теории в жизни. Задачи готовят к практической деятельности в будущем, к решению задач, которые выдвигает жизнь. Решая задачи, ученики расширяют свои представления о жизни. И всё это формирует у обучающихся практические навыки и умения, такие как: подсчет материалов для ремонта квартиры, расчет времени от школы до дома, выбор товаров с учетом скидки, расчет выплаты по кредиту и т. д. То есть, обучая учеников решению текстовых задач, учитель выходит на формирование функциональной математической грамотности.

Список литературы

1. Бегашева, И. С. Формирование функциональной грамотности школьников в контексте преподавания учебных предметов : учеб.-метод. пособие / И. С. Бегашева, Н. И. Васильева, Е. Г. Коликова и др. – Челябинск : ЧИППКРО, 2021 – 1 CD-ROM. –Текст. Изображение : электронные
2. Виноградова, Е. П. Математика : текстовые задачи и методы их решения : учеб.-метод. пособие / Е. П. Виноградова. – Орск : Издательство ОГТИ, 2007. – 94 с. – URL: https://studfile.net/preview/2966867/ (дата обращения: 05.11.2023). – Текст : электронный.
3. Вопросы формирования и оценивания функциональной грамотности средствами учебных предметов : учеб.-метод. пособие / Е. С. Баранова [и др.]; под ред. И. Е. Барыкиной, Е. В. Иваньшиной. – СПб. : ГАОУ ДПО «ЛОИРО», 2021. – 230 с. – (Школа функциональной грамотности) – Текст : непосредственный.
4. Высоцкий, В. С. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ : учеб. пособие / В. С. Высоцкий. – М. : Научный мир, 2011. – 316 с. – Текст : непосредственный.
5. Городничева, А. К. Причины сложности обучения решению задач с параметрами в школе и пути их преодоления / А. К. Городничева. – Текст : непосредственный // Молодой ученый. – 2022. – № 4 (399). – С. 324–326. – URL: https://moluch.ru/archive/399/88383/ (дата обращения: 16.11.2023).
6. Кабацкая, Л. Н. Система работы учителя математики по формированию навыков решения текстовых задач / Л. Н. Кабацкая. – Текст : непосредственный // Проблемы и перспективы развития образования : материалы IV Междунар. науч. конф. (г. Пермь, июль 2013 г.). – Т. 0. – Пермь : Меркурий, 2013. – С. 87–90. – URL: https://moluch.ru/conf/ped/archive/72/4108/ (дата обращения: 02.12.2023).
7. Козко, А. И. Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи / А. И. Козко. – МЦНМО. – М. : МЦНМО, 2016. – 229 с. – Текст : непосредственный.
8. Леонтьев, А. А. Педагогика здравого смысла : избранные работы по философии образования и педагогической психологии / сост., предисл., коммент. Д. А. Леонтьева. – М. : Смысл, 2016. – 528 с. – Текст : непосредственный.
9. Математика. Трудные задания ЕГЭ. Задачи с параметром: профильный уровень / А. В. Шевкин. – М. : Просвещение, 2020. – 96 с. – (Серия «Трудные задания ЕГЭ»). – Текст : непосредственный.
10. Мирошин, В. В. Существенные признаки понятия «параметр» / В. В. Мирошин. – Текст : непосредственный // Математика в школе. – 2010. – № 7. – С. 19–22.
11. Новоселов, С. И. Специальный курс алгебры / С. И. Новоселов. – М. : Высшая школа , 1962. – 206 с. – Текст : непосредственный.

12. Приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования». – URL: fgos_ooo_287.pdf (resurs-yar.ru) (дата обращения : 05.02.2014). – Текст : электронный.
13. Прокопьев, А. А. Задачи с параметрами. Подготовка к ГИА и ЕГЭ / А. А. Прокопьев. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Бином, 2015. – 400 с. – Текст : непосредственный.
14. ЕГЭ 2020, математика, задачи с параметром, задача 18 (профильный уровень) / И. В. Ященко, С. А. Шестаков. – М. : Эксмо, 2020. – Текст : непосредственный.
15. ЕГЭ 2022. Математика. Профильный уровень / Г. В. Дорофеев, Е. А. Седова, С. А. Шестаков, С. В. Пчелинцев. – М. : Эксмо, 2021. – 288 с. – Текст : непосредственный.
16. Шахмейстер, А. Х. Уравнения и неравенства с параметрами / А. Х. Шахмейстер. – 4-е изд. – СПб. : Виктория плюс; М. : МЦНМО; СПб. : Петроглиф, 2019. – 304 с. – Текст : непосредственный.
17. Федеральная рабочая программа (базовый уровень) (для 5–9 классов образовательных организаций) – URL: https://edsoo.ru/rabochie-programmy/ (дата обращения: 10.11.2023). – Текст : электронный.
18. Шевкин, А. В. Обучение решению задач в 5–6 классах : книга для учителя. – 3-е изд. исп. – М. : ООО «ТИД “Русское слово – РС”». – 2002. – 208 с. – URL: https://www.mathedu.ru/text/shevkin_obuchenie_resheniyu_tekstovyh_zadach_v_5-6_klassah_2002/p37/ (дата обращения: 15.11.2023). – Текст : электронный.